

Zeit: 2 Stunden

Hinweis: Der Lösungsweg muss – falls nicht ausdrücklich anders angegeben – nachvollziehbar sein, ansonsten werden keine Teilpunkte vergeben.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Summe
Punkte	4	4	4	3	3	4	4	3	4	4	4	4	45

Vorname:

Name:

Aufgabe 1

Löse die Klammern auf und fasse so weit wie möglich zusammen:

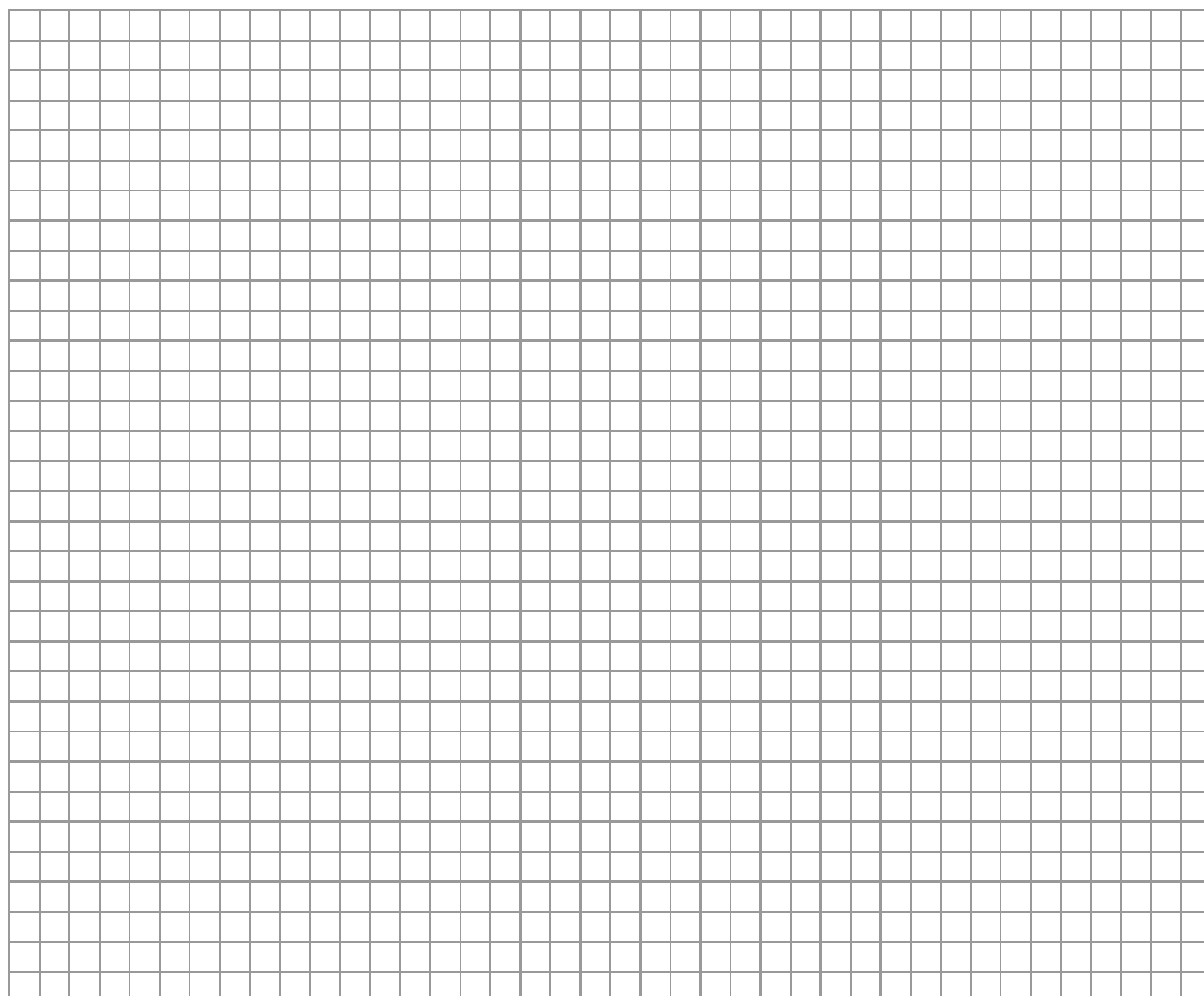
(a) $27b - (4b^2 + 3(2b - 4) - 9b)$

(b) $-\frac{12}{5} \cdot c - \left(2c - \left(\frac{1}{3} \cdot c + 3c\right)\right)$

(c) $\frac{3f}{4g} \cdot \left(\frac{2}{5}f^3 \cdot 20g\right)$

Berechne in Minuten:

(d) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10} \cdot 24 \text{ h} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ min}$



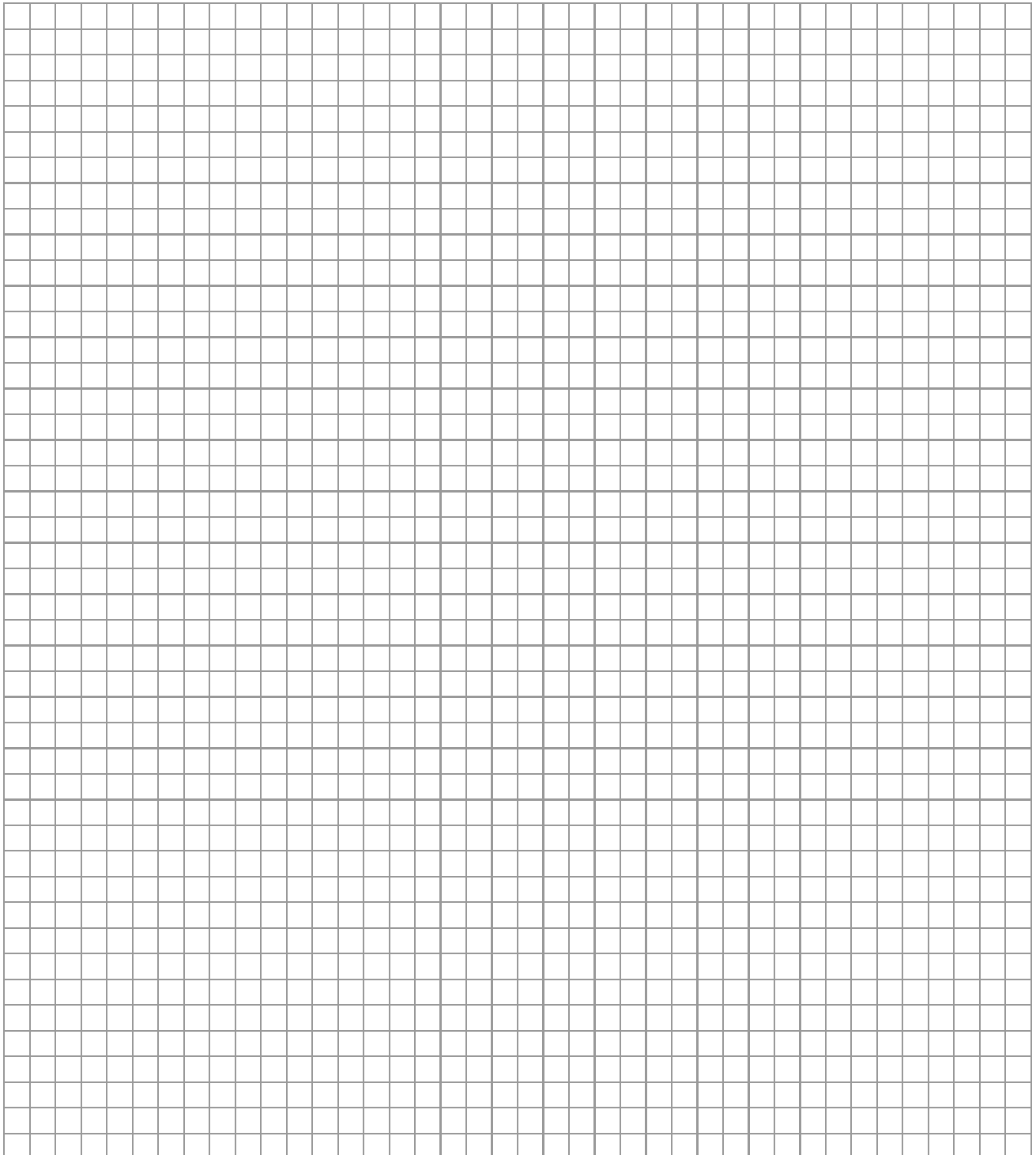
Aufgabe 2

- (a) Löse folgende Gleichung nach der Unbekannten m auf und gib das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch an.

$$2m - \frac{2}{5} + m \cdot \left(m - \frac{1}{5}\right) = m \cdot \left(m + \frac{2}{5}\right)$$

- (b) Löse folgende Gleichung nach der Unbekannten x auf und gib das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch an.

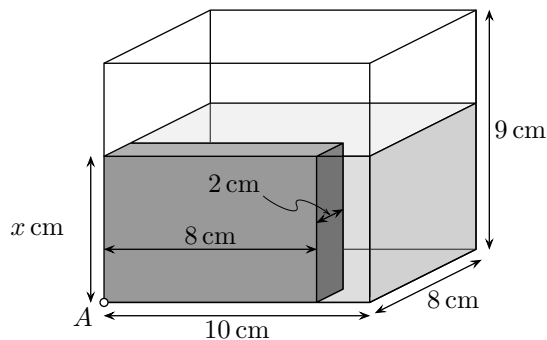
$$\frac{x}{51} = 2x - \frac{x-3}{17} - 1$$



Aufgabe 3

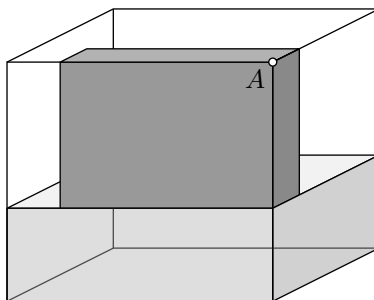
In einem Plexiglasquader ist in der unteren Ecke A ein Gummiquader befestigt. Der Plexiglasquader ist teilweise mit Wasser gefüllt. Der Pegelstand reicht genau bis zur Deckfläche des Gummiquaders.

Der Plexiglasquader hat die Abmessungen $10\text{ cm} \times 8\text{ cm} \times 9\text{ cm}$. Der Gummiquader hat eine Grundfläche von $8\text{ cm} \times 2\text{ cm}$ und unbekannte Höhe $x\text{ cm}$.

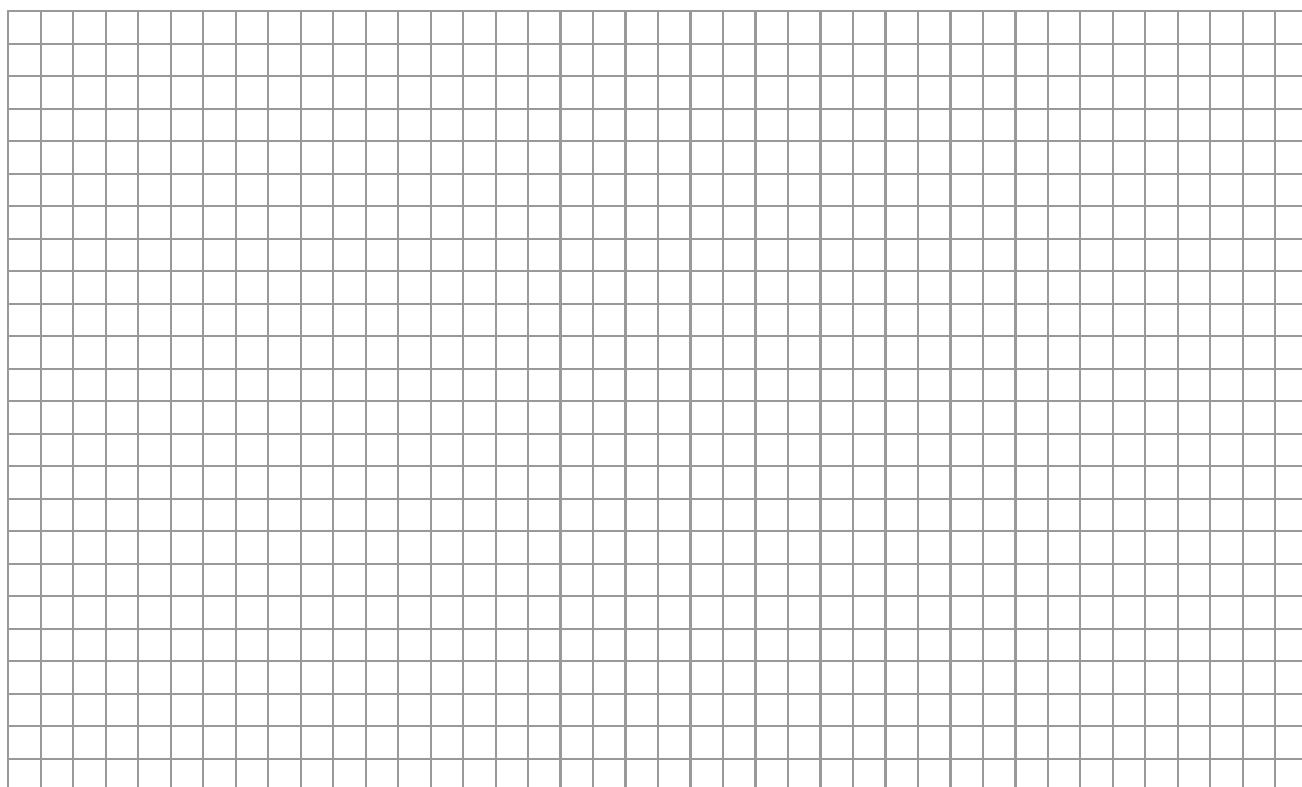


- (a) Drücke das Volumen des Wassers durch x aus. Vereinfache den Ausdruck.

Nun wird der Quader auf den Kopf gestellt. Der Pegelstand reicht nun wieder genau bis zur Deckfläche des Gummiquaders.

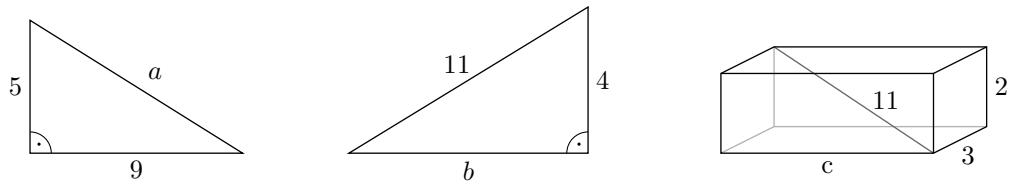


- (b) Bestimme aus diesen Angaben die Höhe x .



Aufgabe 4

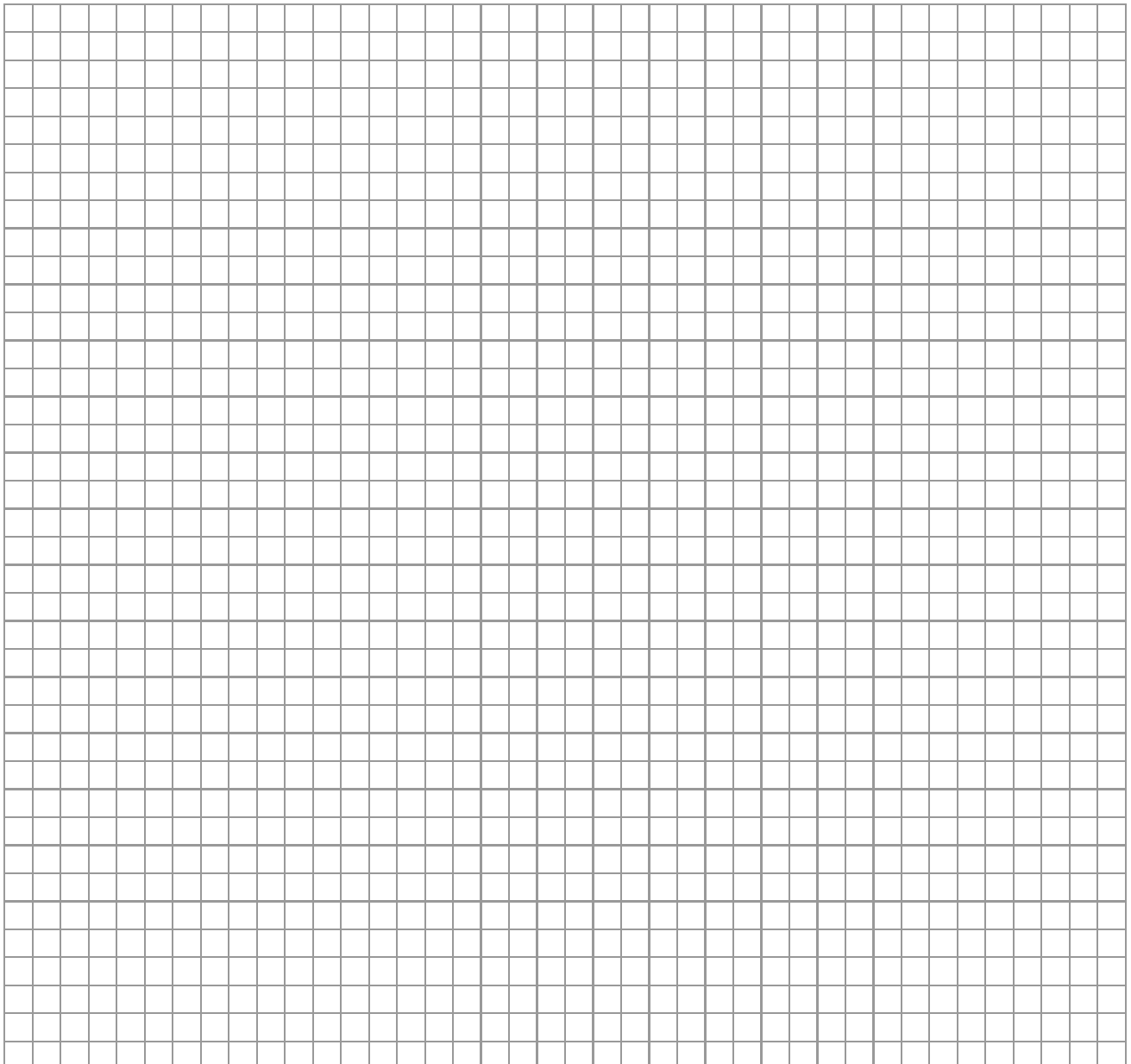
Gegeben sind zwei Dreiecke und ein Quader mit gewissen Seitenlängen (die Skizzen sind nicht massstäblich korrekt).



- (a) Berechne die drei Längen a , b und c und schreibe diese je als Wurzel einer ganzen Zahl:

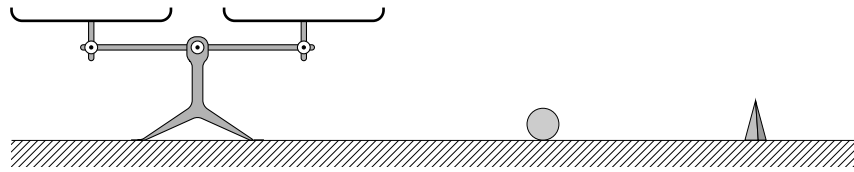
$$a = \sqrt{\quad}, \quad b = \sqrt{\quad}, \quad c = \sqrt{\quad}.$$

- (b) Berechne die Primfaktorzerlegung von $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$.



Aufgabe 5

Wir betrachten drei Elemente: die Waage, die Kugel und die Pyramide:

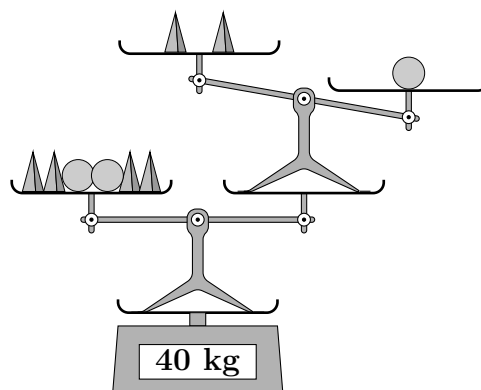


Die folgende Figur zeigt eine bestimmte Situation mit zwei Waagen. Die untere Waage ist im Gleichgewicht, die obere nicht.

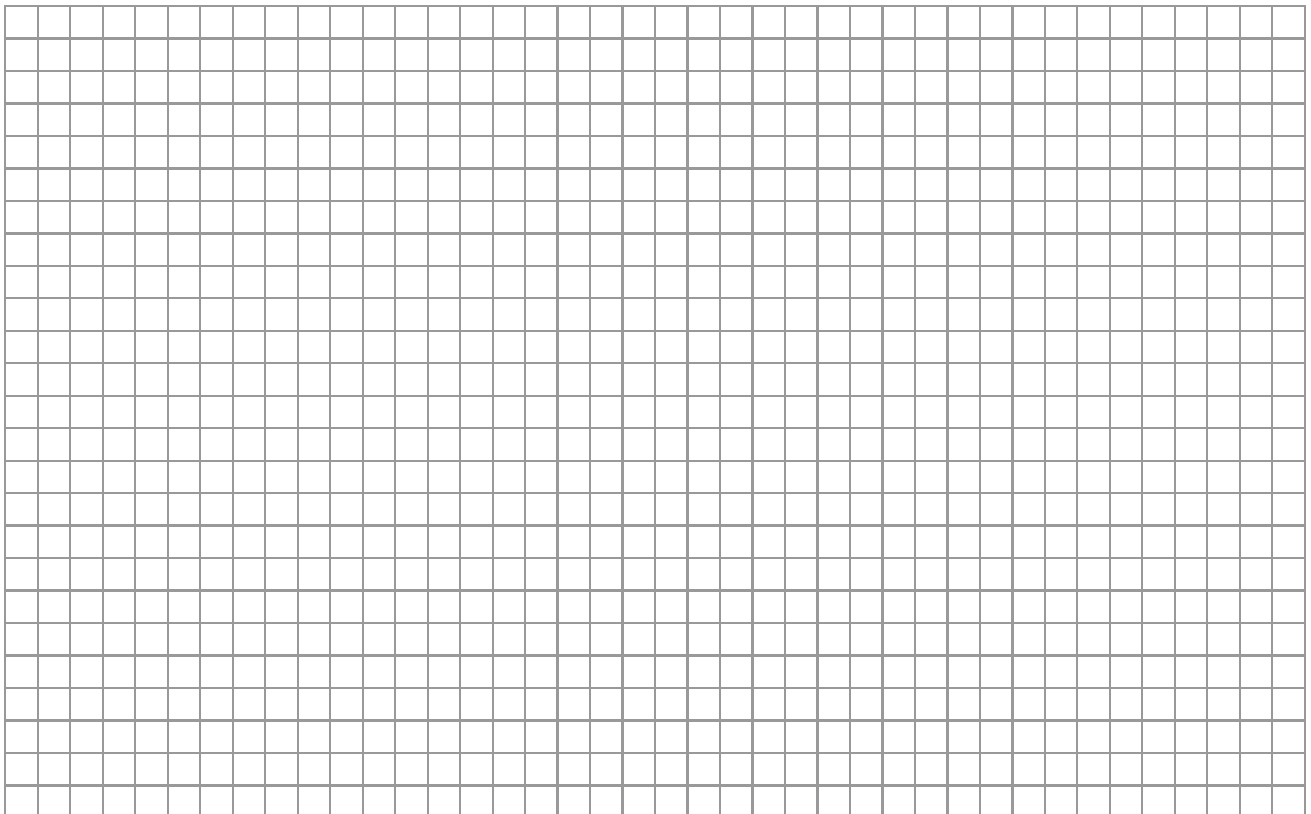
Insgesamt wiegen die Elemente zusammen 40 kg.

Gleich dargestellte Elemente haben dasselbe Gewicht.

Jedes Gewicht ist ein ganzzahliges Vielfaches von 1 kg.



Bestimme aus diesen Angaben das jeweilige Gewicht der drei Elemente.



Aufgabe 6

Betrachte folgende Textaufgabe:

Der Vater von Peter ist heute drei Mal so alt wie Peter. Vor vier Jahren war der Vater vier Mal so alt, wie Peter damals war. Wie alt ist Peter heute?

- (a) Die Variable n bezeichnet das Alter von Peter heute.

Fülle die leeren Felder der Tabelle aus.

Notiere in der linken Spalte Terme mit der Variablen n :

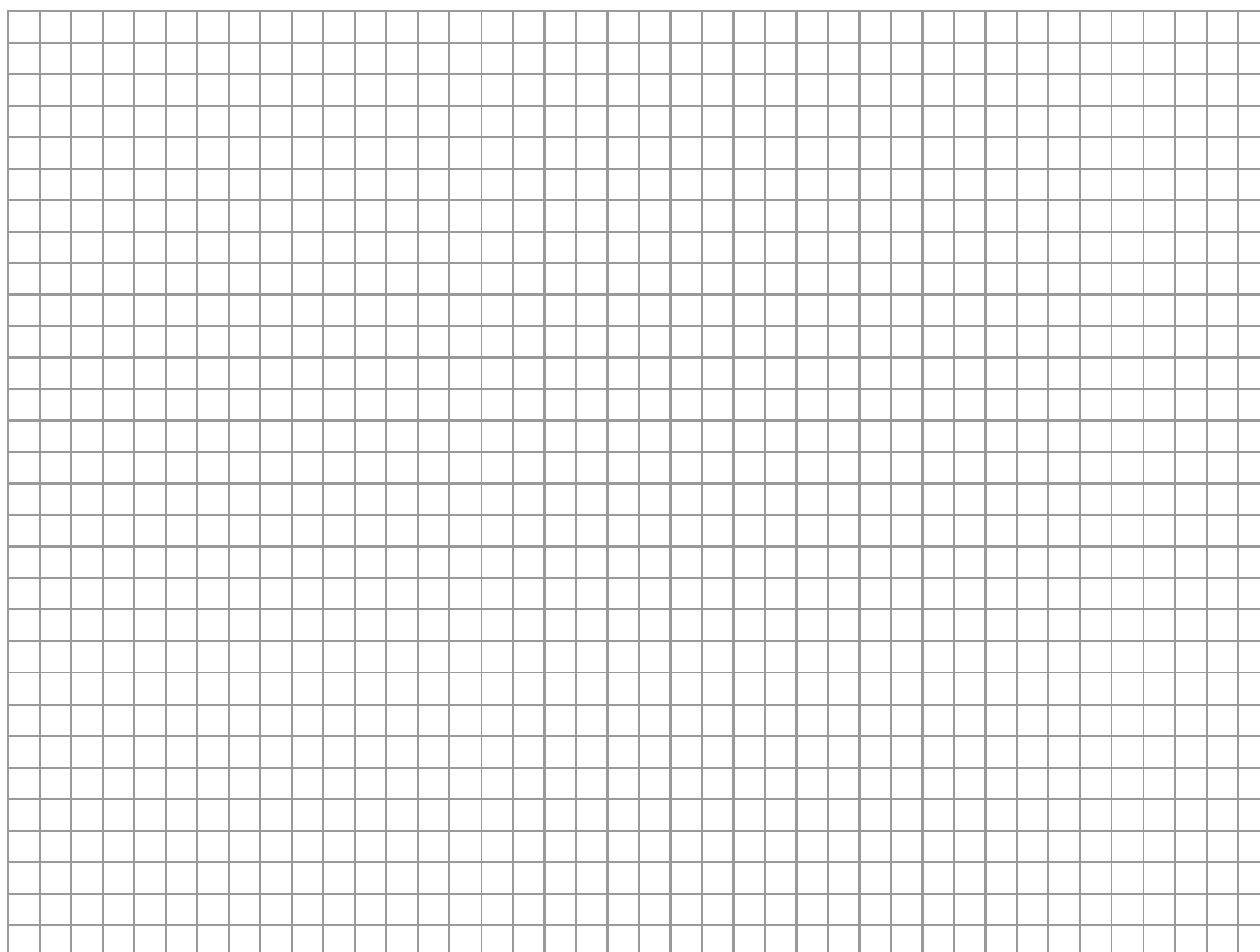
Term	Bedeutung
n	Das Alter von Peter heute
	Das Alter des Vaters von Peter heute
	Das Alter von Peter vor 4 Jahren
	Das Alter des Vaters von Peter vor 4 Jahren

- (b) Stelle eine Gleichung auf, welche zur Beantwortung der Textaufgabe führt und löse diese Gleichung.

Betrachte nun die folgende, zweite Textaufgabe:

Die Mutter von Anna ist heute vier Mal so alt wie Anna. In fünf Jahren wird die Mutter drei Mal so alt sein, wie Anna dann sein wird. Wie alt ist Anna heute?

- (c) Löse diese zweite Textaufgabe wieder durch Aufstellen einer Gleichung.

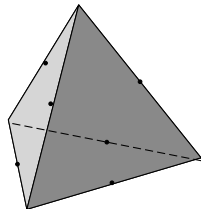


Aufgabe 7

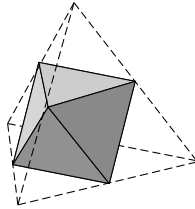
Die linke Figur zeigt ein *Tetraeder*, dies ist eine Pyramide mit einer dreiseitigen Grundfläche. Eingezeichnet sind die Kantenmitten.

Dem Tetraeder werden die Spitzen so abgeschnitten, dass die Schnitte durch die Kantenmitten verlaufen. Den Restkörper nennt man *Oktaeder* (mittlere Figur).

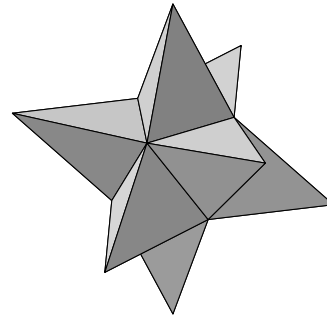
Im nächsten Schritt wird auf jede Seitenfläche des Oktaeders eine Pyramide gesetzt. So entsteht ein *Oktaederstern* (rechte Figur).



Tetraeder



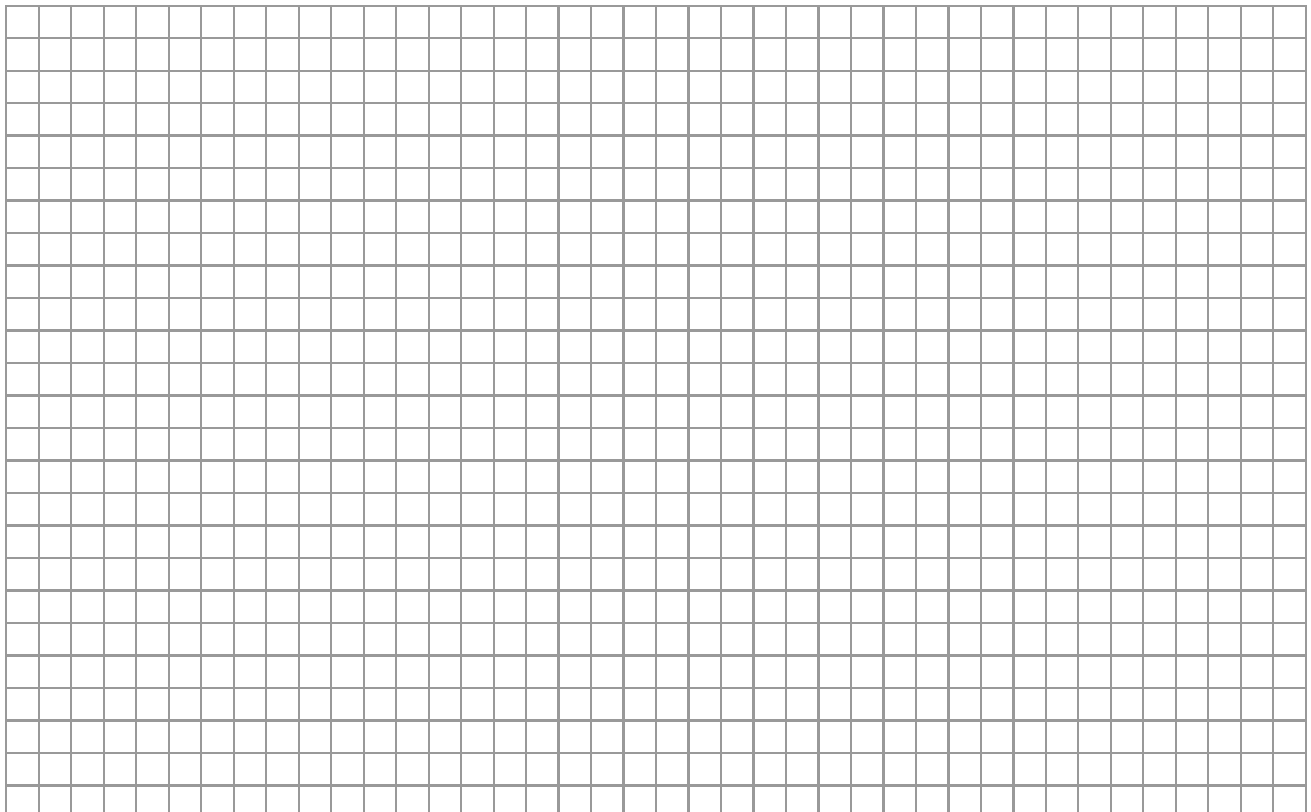
Oktaeder



Oktaeder-Stern

Vervollständige die folgende Tabelle. Bestimme dazu die Anzahl Ecken, Kanten und Flächen von Oktaeder und Oktaeder-Stern:

	Anzahl Ecken	Anzahl Kanten	Anzahl Flächen
Tetraeder	4	6	4
Oktaeder			
Oktaeder-Stern			



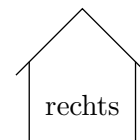
Aufgabe 8

In drei Häusern verschiedener Farbe leben drei Familien unterschiedlicher Nationalitäten mit je einem Haustier.

Man hat folgende Angaben:

1. Eines der Häuser ist blau.
2. Die Deutschen halten einen Vogel.
3. Im mittleren Haus lebt eine Katze.
4. Die italienische Familie lebt im gelben Haus.
5. Die Franzosen haben direkte Nachbarn mit einem Hund.
6. Das linke Haus ist rot.

Fülle mit diesen Angaben die folgende Tabelle aus:



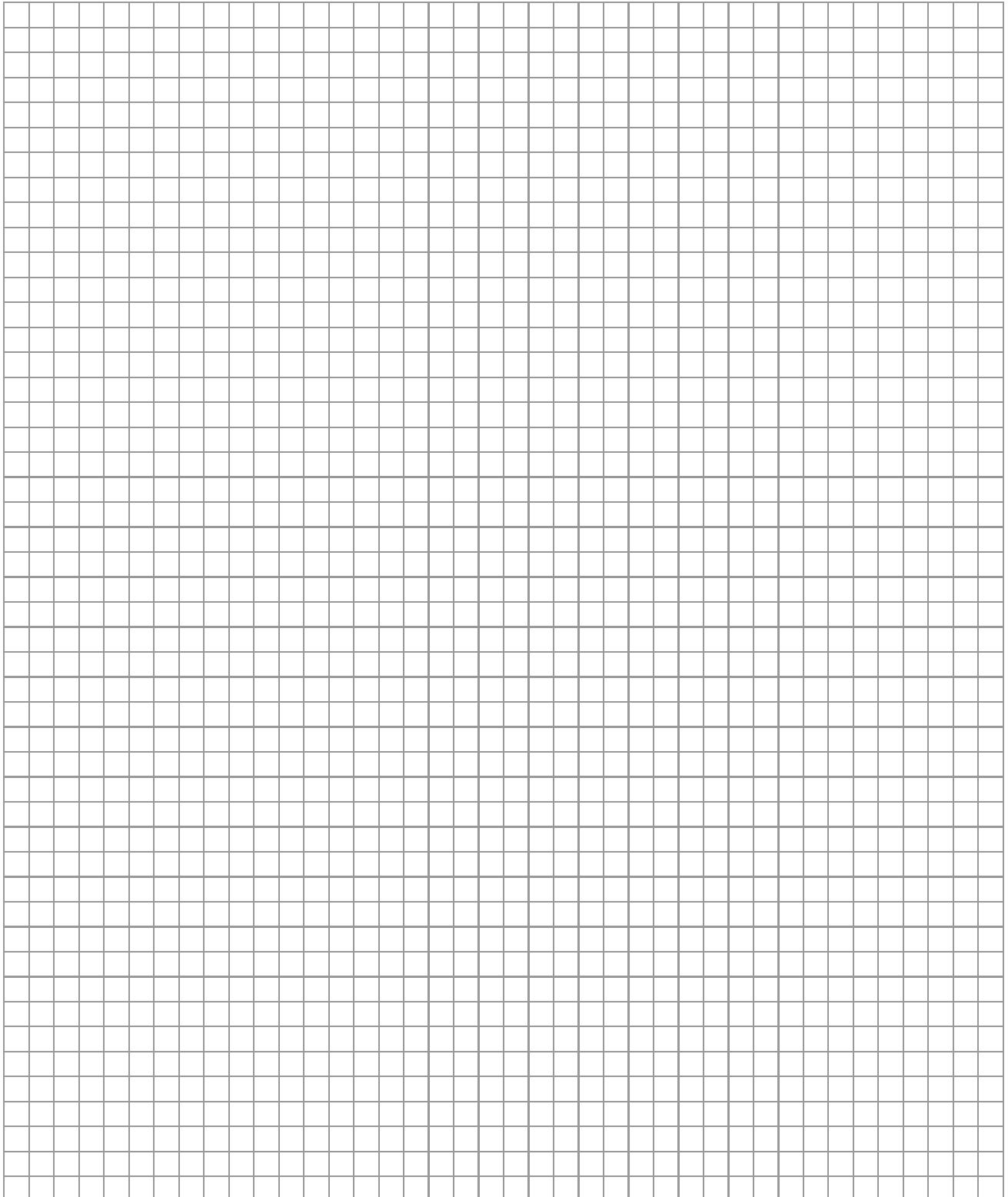
Nationalität			
Haustier			
Farbe des Hauses			

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Aufgabe 9

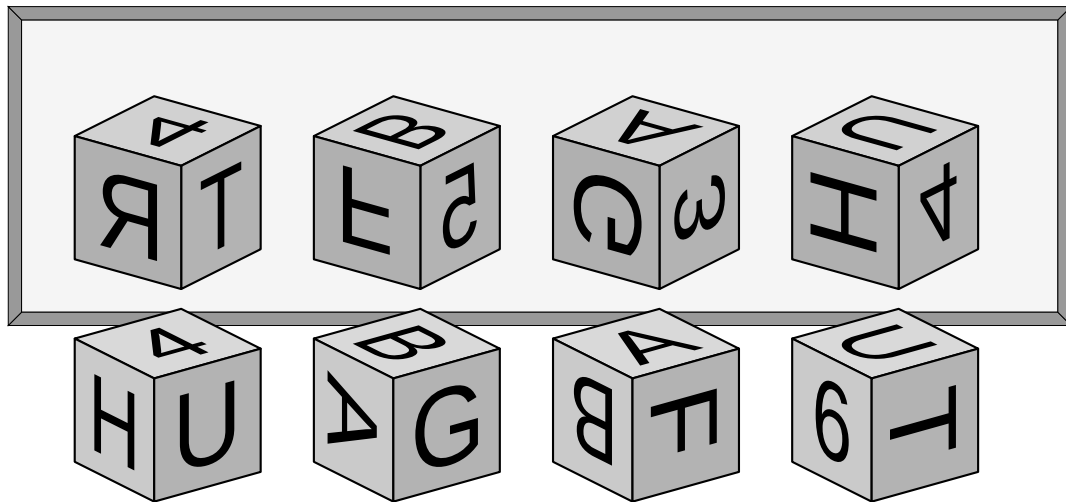
Die Zahl 32 hat die Primfaktorzerlegung $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$. Damit können die 6 Teiler einfach abgelesen werden: 1, 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 und 2^5 .

- (a) Wie viele verschiedene Teiler hat die Zahl $96 = 2^5 \cdot 3$?
- (b) Wie viele verschiedene Teiler hat die Zahl $288 = 2^5 \cdot 3^2$?
- (c) Wie viele verschiedene Teiler hat die Zahl $180\,000 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^4$?

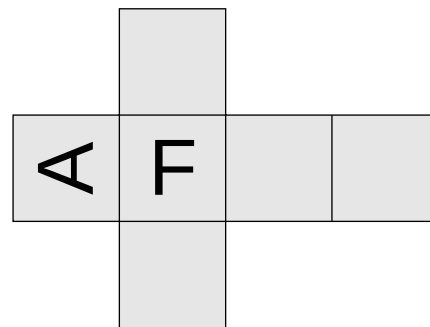
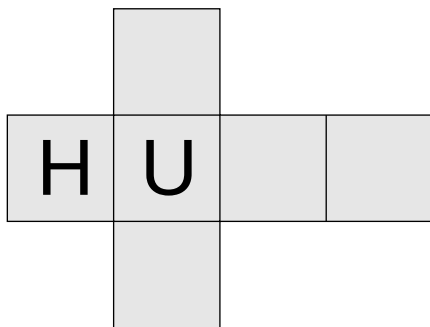


Aufgabe 10

Die folgende Abbildung zeigt zwei Paare von identischen Würfeln. Im Spiegel dahinter sieht man auch die Rückseiten der Würfel.



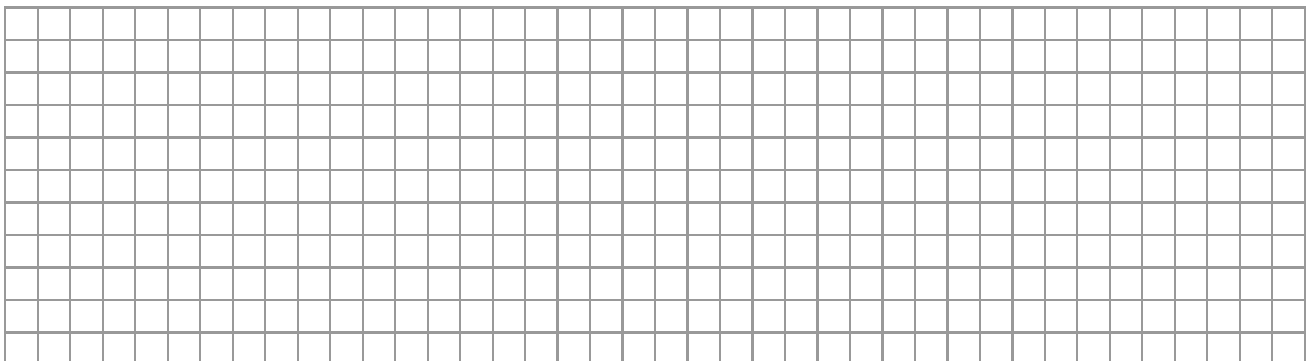
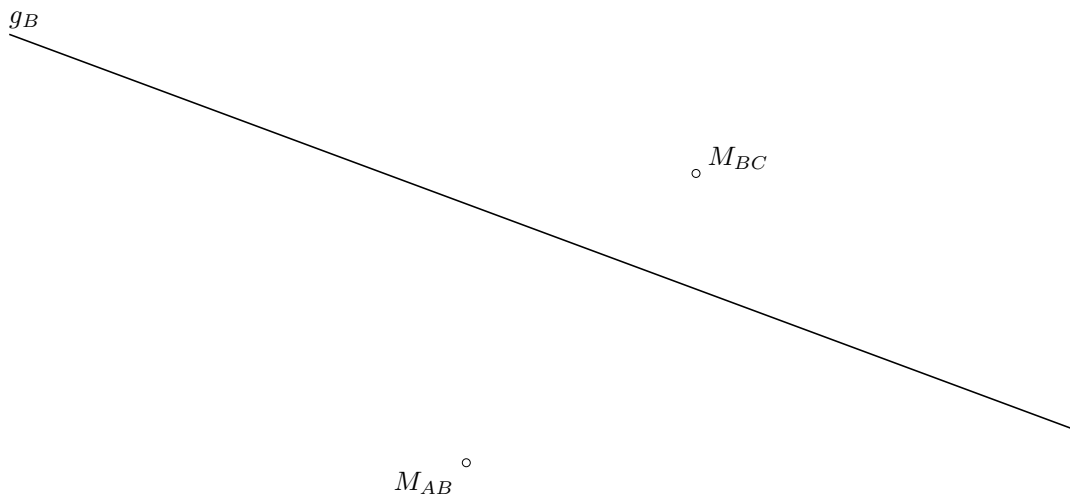
Vervollständige die zwei Würfelnetze mit den Buchstaben und Zahlen **in der korrekten Orientierung**. Die Antwort muss **nicht** begründet werden.



Aufgabe 11

Von einem Rechteck $ABCD$ kennt man die Seitenmitte M_{AB} der Seite AB und die Seitenmitte M_{BC} der Seite BC . Ausserdem weiss man, dass die Ecke B auf der Geraden g_B liegt.

Konstruiere die zwei möglichen Rechtecke $ABCD$. Beschrifte die Ecken korrekt.



Lies den folgenden Artikel sorgfältig durch und beantworte danach die untenstehenden Fragen.

[illegible]

Lösungen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Summe
Punkte	4	4	4	3	3	4	4	3	4	4	4	4	45

Aufgabe 1 [4P]

Löse die Klammern auf und fasse so weit wie möglich zusammen:

(a) $27b - (4b^2 + 3(2b - 4) - 9b)$

(b) $-\frac{12}{5} \cdot c - \left(2c - \left(\frac{1}{3} \cdot c + 3c\right)\right)$

(c) $\frac{3f}{4g} \cdot \left(\frac{2}{5}f^3 \cdot 20g\right)$

Berechne in Minuten:

(d) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10} \cdot 24 \text{ h} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ min}$

(a)

$$\begin{aligned} 27b - (4b^2 + 3(2b - 4) - 9b) &= 27b - (4b^2 - 3b - 12) \\ &= \underline{\underline{-4b^2 + 30b + 12.}} \end{aligned}$$

[1 P]

(b)

$$\begin{aligned} -\frac{12}{5} \cdot c - \left(2c - \left(\frac{1}{3} \cdot c + 3c\right)\right) &= -\frac{12}{5} \cdot c - \left(2c - \frac{1}{3} \cdot c - 3c\right) \\ &= -\frac{12}{5} \cdot c - \left(-\frac{4}{3} \cdot c\right) \\ &= -\frac{12}{5} \cdot c + \frac{4}{3} \cdot c \\ &= \underline{\underline{-\frac{16}{15} \cdot c.}} \end{aligned}$$

[1 P]

(c)

$$\begin{aligned} \frac{3f}{4g} \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot f^3 \cdot 20g\right) &= \frac{3f}{4g} \cdot 8 \cdot f^3 \cdot g \\ &= \underline{\underline{6f^4}} \end{aligned}$$

[1 P]

(d)

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10} \cdot 24 \text{ h} &= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{12} \cdot 24 \text{ h} \\ &= \frac{1}{10} \cdot 2 \text{ h} \\ &= \frac{1}{5} \text{ h} \\ &= \underline{\underline{12 \text{ min}}} \end{aligned}$$

[1 P]

Aufgabe 2 [4P]

- (a) Löse folgende Gleichung nach der Unbekannten m auf und gib das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch an.

$$2m - \frac{2}{5} + m \cdot \left(m - \frac{1}{5}\right) = m \cdot \left(m + \frac{2}{5}\right)$$

- (b) Löse folgende Gleichung nach der Unbekannten x auf und gib das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch an.

$$\frac{x}{51} = 2x - \frac{x-3}{17} - 1$$

(a)

$$\begin{aligned} 2m - \frac{2}{5} + m \cdot \left(m - \frac{1}{5}\right) &= m \cdot \left(m + \frac{2}{5}\right) && | \text{ TU} \\ 2m - \frac{2}{5} + m^2 - \frac{1}{5} \cdot m &= m^2 + \frac{2}{5} \cdot m && \left| -m^2 - \frac{2}{5} \cdot m + \frac{2}{5} \right. \\ \frac{7}{5} \cdot m &= \frac{2}{5} && | \cdot 5 \div 7 \\ m &= \underline{\underline{\frac{2}{7}}} \end{aligned}$$

[2 P]

(b)

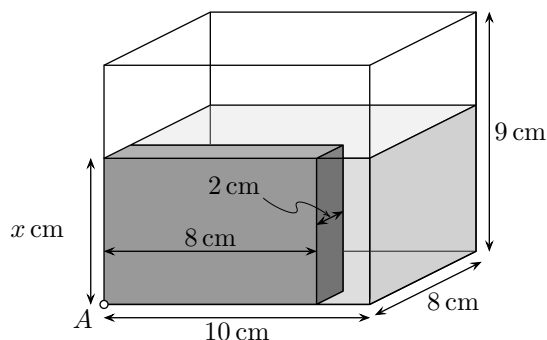
$$\begin{aligned} \frac{x}{51} &= 2x - \frac{x-3}{17} - 1 && | \cdot 51 \\ x &= 102x - 3x + 9 - 51 && | \text{ TU} \\ x &= 99x - 42 && | -x + 42 \\ 42 &= 98x && | \div 98 \\ x &= \frac{42}{98} = \frac{6}{14} = \underline{\underline{\frac{3}{7}}} \end{aligned}$$

[2 P]

Aufgabe 3 [4P]

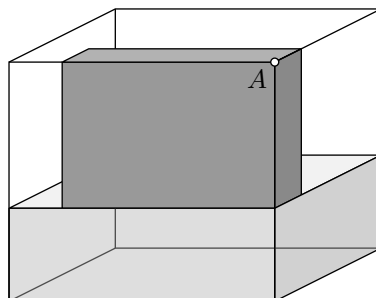
In einem Plexiglasquader ist in der unteren Ecke A ein Gummiquader befestigt. Der Plexiglasquader ist teilweise mit Wasser gefüllt. Der Pegelstand reicht genau bis zur Deckfläche des Gummiquaders.

Der Plexiglasquader hat die Abmessungen $10\text{ cm} \times 8\text{ cm} \times 9\text{ cm}$. Der Gummiquader hat eine Grundfläche von $8\text{ cm} \times 2\text{ cm}$ und unbekannte Höhe $x\text{ cm}$.



- (a) Drücke das Volumen des Wassers durch x aus. Vereinfache den Ausdruck.

Nun wird der Quader auf den Kopf gestellt. Der Pegelstand reicht nun wieder genau bis zur Deckfläche des Gummiquaders.



- (b) Bestimme aus diesen Angaben die Höhe x .

(a) $V_{\text{Wasser}} = (8 \cdot 10 - 2 \cdot 8) \cdot x = \underline{\underline{64x}}$

[2 P]

(b) Gleichung:

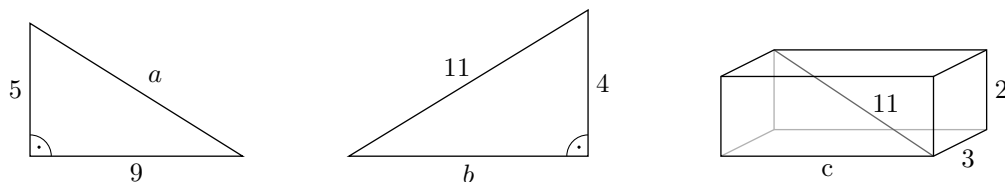
$$\begin{array}{rcl} 64x & = & 8 \cdot 10 \cdot (9 - x) \\ 64x & = & 720 - 80x & \quad | +80x \\ 144x & = & 720 & \quad | \div 72 \\ 2x & = & 10 & \quad | \div 2 \\ x & = & 5 \end{array}$$

[2 P]

x misst 5 cm.

Aufgabe 4 [3P]

Gegeben sind zwei Dreiecke und ein Quader mit gewissen Seitenlängen (die Skizzen sind nicht massstäblich korrekt).



- (a) Berechne die drei Längen a , b und c und schreibe diese je als Wurzel einer ganzen Zahl:

$$a = \sqrt{106}, \quad b = \sqrt{105}, \quad c = \sqrt{108}.$$

Nach dem Satz von Pythagoras gilt:

$$a^2 = 5^2 + 9^2 = 25 + 81 = 106$$

$$b^2 = 11^2 - 4^2 = 121 - 16 = 105$$

$$c^2 = 11^2 - 3^2 - 2^2 = 121 - 9 - 4 = 108$$

[1.5 P]

- (b) Berechne die Primfaktorzerlegung von $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$.

Es gilt $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 106 \cdot 105 \cdot 108$.

Um die Primfaktorzerlegung von $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$ zu berechnen, bestimmt man am Besten die Primfaktorzerlegung der Faktoren 106, 105 und 108.

Es gilt $106 = 2 \cdot 53$ und 53 ist prim.

Weiter ist $105 = 5 \cdot 21 = 5 \cdot 3 \cdot 7$.

Schliesslich gilt $108 = 2 \cdot 54 = 2 \cdot 2 \cdot 27 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Somit erhalten wir

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = \underline{\underline{2 \cdot 53 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}}.$$

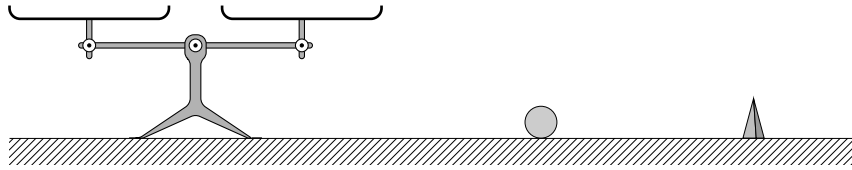
Dies lässt sich kompakter schreiben als

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = \underline{\underline{2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 53}}.$$

[1.5 P]

Aufgabe 5 [3P]

Wir betrachten drei Elemente: die Waage, die Kugel und die Pyramide:

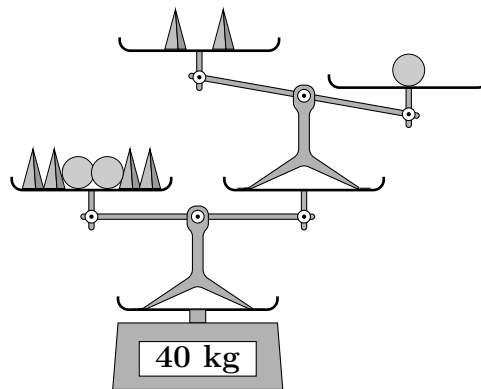


Die folgende Figur zeigt eine bestimmte Situation mit zwei Waagen. Die untere Waage ist im Gleichgewicht, die obere nicht.

Insgesamt wiegen die Elemente zusammen 40 kg.

Gleich dargestellte Elemente haben dasselbe Gewicht.

Jedes Gewicht ist ein ganzzahliges Vielfaches von 1 kg.



Bestimme aus diesen Angaben das jeweilige Gewicht der drei Elemente.

Weil die untere Waage im Gleichgewicht ist, wiegen vier Pyramiden und zwei Kugeln gleichviel wie eine Waage, zwei Pyramiden und eine Kugel.

Somit wiegt eine Waage gleichviel wie zwei Pyramiden und eine Kugel.

Das Gesamtgewicht von 40 kg ist also äquivalent zu 10 Pyramiden und 5 Kugeln.

Da die obere Waage im Ungleichgewicht ist, wiegt eine Kugel mehr als zwei Pyramiden. Ersetzt man die 5 Kugeln im Gesamtgewicht durch 10 Pyramiden, so erhält man, dass 20 Pyramiden leichter sind als 40 kg. Somit muss eine Pyramide leichter sein als 2 kg. Da das Gewicht von jedem Element ein ganzzahliges Vielfaches von 1 kg sein muss, bleibt nur noch die Möglichkeit, dass die Pyramide 1 kg wiegt.

Daher müssen die 5 Kugeln insgesamt 30 kg wiegen, eine Kugel also 6 kg und daher die Waage 8 kg.

Waage = 8 kg, Kugel = 6 kg, Pyramide = 1 kg

[3 P]

Aufgabe 6 [4P]

Betrachte folgende Textaufgabe:

Der Vater von Peter ist heute drei Mal so alt wie Peter. Vor vier Jahren war der Vater vier Mal so alt, wie Peter damals war. Wie alt ist Peter heute?

- (a) Die Variable n bezeichnet das Alter von Peter heute.

Fülle die leeren Felder der Tabelle aus.

Notiere in der linken Spalte Terme mit der Variablen n :

Term	Bedeutung
n	Das Alter von Peter heute
$3n$	Das Alter des Vaters von Peter heute
$n - 4$	Das Alter von Peter vor 4 Jahren
$3n - 4$	Das Alter des Vaters von Peter vor 4 Jahren

[1 P]

- (b) Stelle eine Gleichung auf, welche zur Beantwortung der Textaufgabe führt und löse diese Gleichung.

Betrachte nun die folgende, zweite Textaufgabe:

Die Mutter von Anna ist heute vier Mal so alt wie Anna. In fünf Jahren wird die Mutter drei Mal so alt sein, wie Anna dann sein wird. Wie alt ist Anna heute?

- (c) Löse diese zweite Textaufgabe wieder durch Aufstellen einer Gleichung.

- (b) Die Gleichung lautet

$$3n - 4 = 4 \cdot (n - 4).$$

Die Lösung erhält man durch die Umformung

$$\begin{aligned} 3n - 4 &= 4 \cdot (n - 4) \\ 3n - 4 &= 4n - 16 & | -3n + 16 \\ 12 &= n \end{aligned}$$

[1 P]

Peter ist heute 12 Jahre alt.

- (c) Am Besten macht man auch hier eine Tabelle:

Term	Bedeutung
n	Das Alter von Anna heute
$4n$	Das Alter der Mutter von Anna heute
$n + 5$	Das Alter von Anna in 5 Jahren
$4n + 5$	Das Alter der Mutter von Anna in 5 Jahren

So erhält man aus der Aufgabenstellung die Gleichung

$$4n + 5 = 3(n + 5).$$

[1 P]

Die Lösung erhält man durch folgende Umformungen:

$$\begin{aligned} 4n + 5 &= 3(n + 5) \\ 4n + 5 &= 3n + 15 & | -3n - 5 \\ n &= 10 \end{aligned}$$

[1 P]

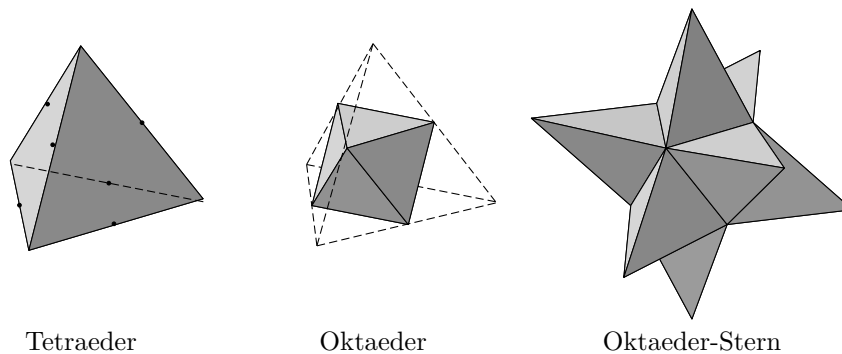
Anna ist heute 10 Jahre alt.

Aufgabe 7 [4P]

Die linke Figur zeigt ein *Tetraeder*, dies ist eine Pyramide mit einer dreiseitigen Grundfläche. Eingezeichnet sind die Kantenmitten.

Dem Tetraeder werden die Spitzen so abgeschnitten, dass die Schnitte durch die Kantenmitten verlaufen. Den Restkörper nennt man *Oktaeder* (mittlere Figur).

Im nächsten Schritt wird auf jede Seitenfläche des Oktaeders eine Pyramide gesetzt. So entsteht ein *Oktaederstern* (rechte Figur).



Vervollständige die folgende Tabelle. Bestimme dazu die Anzahl Ecken, Kanten und Flächen von Oktaeder und Oktaeder-Stern:

	Anzahl Ecken	Anzahl Kanten	Anzahl Flächen
Tetraeder	4	6	4
Oktaeder	6	12	8
Oktaeder-Stern	14	36	24

Die Ecken des Oktaeders sind die Kantenmitten des Tetraeders. Daher hat der Oktaeder 6 Ecken. Der Oktaeder hat dreieckige Seitenflächen, wobei die einen den Seitenflächen des Tetraeders und die anderen den Ecken des Tetraeders entsprechen. Daher hat der Oktaeder $4 + 4 = 8$ Seitenflächen. Jede Kante des Oktaeders gehört zu zwei Dreiecken. Man kann diese daher abzählen als $(\text{Anzahl Seitenflächen}) \cdot (\text{Anzahl Seiten des Dreiecks}) : 2 = 8 \cdot 3 : 2 = 12$ abzählen.

Jede Ecke des Oktaeders ist auch eine Ecke des Oktaeder-Sterns. Zusätzlich gibt es aber noch die Ecken, die die Spitzen der Pyramiden sind. Daher hat der Oktaeder-Stern $6 + 8 = 14$ Ecken. Die Seitenflächen des Oktaeder-Sterns sind die Mantelflächen der Pyramiden. Die 8 dreiseitigen Pyramiden mit je drei Flächen führen zu $8 \cdot 3 = 24$ Flächen. Somit hat der Oktaeder-Stern 24 Flächen. Jede Kante des Oktaeders ist auch eine Kante des Oktaeder-Sterns. Zusätzlich gibt es aber noch die Kanten, die zu den Spitzen der Pyramiden führen. Da jede Pyramide so viele Kanten zur Spitze, wie Mantel-Seitenflächen hat, sind dies 24. Also hat der Oktaeder-Stern $12 + 24 = 36$ Kanten.

[4P]

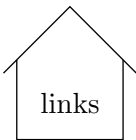
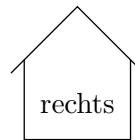
Aufgabe 8 [3P]

In drei Häusern verschiedener Farbe leben drei Familien unterschiedlicher Nationalitäten mit je einem Haustier.

Man hat folgende Angaben:

1. Eines der Häuser ist blau.
2. Die Deutschen halten einen Vogel.
3. Im mittleren Haus lebt eine Katze.
4. Die italienische Familie lebt im gelben Haus.
5. Die Franzosen haben direkte Nachbarn mit einem Hund.
6. Das linke Haus ist rot.

Fülle mit diesen Angaben die folgende Tabelle aus:

	 links	 mitte	 rechts
Nationalität	Deutsche ⁽⁷⁾	Franzosen ⁽³⁾	Italiener ⁽⁴⁾
Haustier	Vogel ⁽⁸⁾	Katze ⁽¹⁾	Hund ⁽⁹⁾
Farbe des Hauses	rot ⁽²⁾	blau ⁽⁶⁾	gelb ⁽⁵⁾

Wegen 4. weiss man, dass im mittleren Haus eine Katze lebt (1) und wegen 6. das rechte Haus rot ist (2). Wegen 5. kann die französische Familie weder im linken noch im linken Haus leben, sie muss daher im mittleren Haus leben (3). Wegen 4. können die Italiener weder im linken Haus, das gelb ist, noch im mittleren Haus wohnen, da dort die Franzosen leben. Sie müssen daher im rechten Haus wohnen (4) und dieses muss gelb sein (5). Der Rest ist nun einfach: Nach 1. ist das mittlere Haus blau (6), da die Farben der anderen Häuser schon bestimmt sind. Weiter lebt im linken Haus die deutsche Familie (7), da die Franzosen im mittleren und die Italiener im rechten Haus wohnen. Wegen 2. ist das Haustier im linken Haus der Vogel (8) und wegen 5. das dritte Haustier ein Hund (9).

[3 P]

Aufgabe 9 [4P]

Die Zahl 32 hat die Primfaktorzerlegung $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$. Damit können die 6 Teiler einfach abgelesen werden: 1, 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 und 2^5 .

- (a) Wie viele verschiedene Teiler hat die Zahl $96 = 2^5 \cdot 3$?
- (b) Wie viele verschiedene Teiler hat die Zahl $288 = 2^5 \cdot 3^2$?
- (c) Wie viele verschiedene Teiler hat die Zahl $180\,000 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^4$?

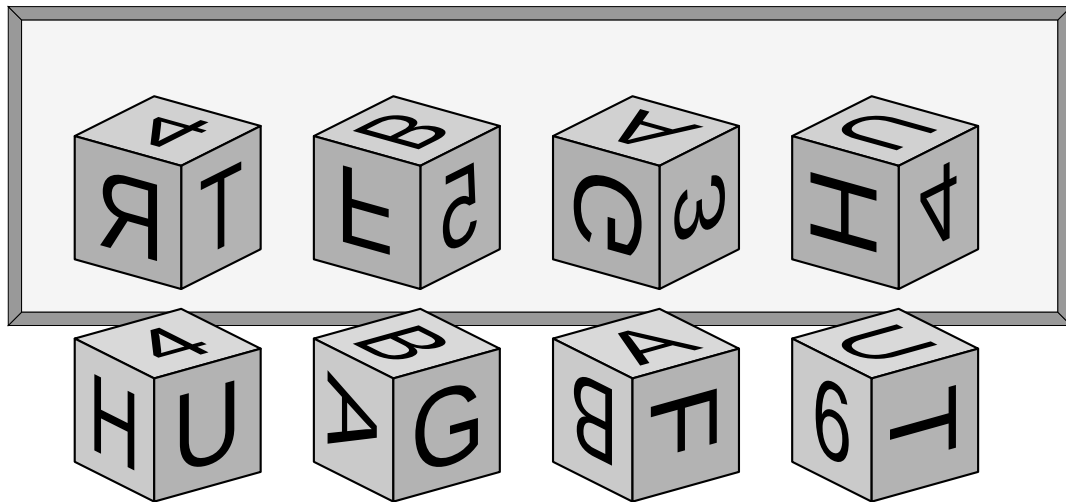
(a) Die Zahl $x = 2^5 \cdot 3$ hat $6 \cdot 2 = \underline{\underline{12}}$ Teiler, denn jeder Teiler von $32 = 2^5$ ist auch ein Teiler von x und das 3-fache von jedem Teiler von 32 ist auch ein Teiler von x . [1 P]

(b) Die Zahl $y = 2^5 \cdot 3^2$ hat $6 \cdot 3 = \underline{\underline{18}}$ Teiler. Diese sind von der Form $a \cdot b$ wobei a eine der 6 Zahlen 1, 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 , 2^5 und b eine der 3 Zahlen 1, 3, 3^2 ist. [1 P]

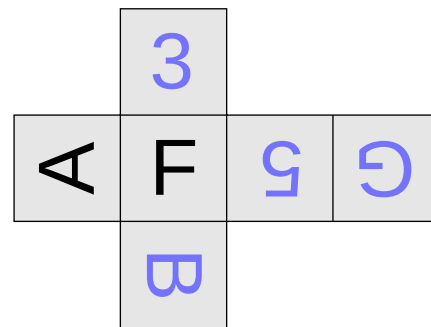
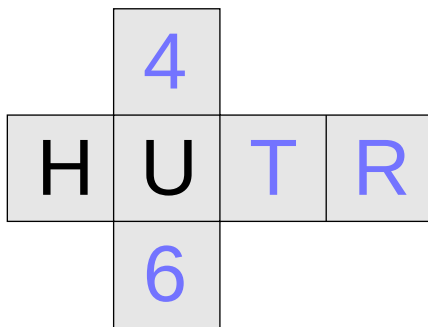
(c) Die Zahl $z = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^4$ hat $6 \cdot 3 \cdot 5 = \underline{\underline{90}}$ Teiler. Diese sind von der Form $a \cdot b \cdot c$, wobei a eine der 6 Zahlen 1, 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 , 2^5 , b eine der 3 Zahlen 1, 3, 3^2 und c eine der 5 Zahlen 1, 5, 5^2 , 5^3 , 5^4 ist. [2 P]

Aufgabe 10 [4P]

Die folgende Abbildung zeigt zwei Paare von identischen Würfeln. Im Spiegel dahinter sieht man auch die Rückseiten der Würfel.



Vervollständige die zwei Würfelnetze mit den Buchstaben und Zahlen in der korrekten Orientierung. Die Antwort muss **nicht** begründet werden.

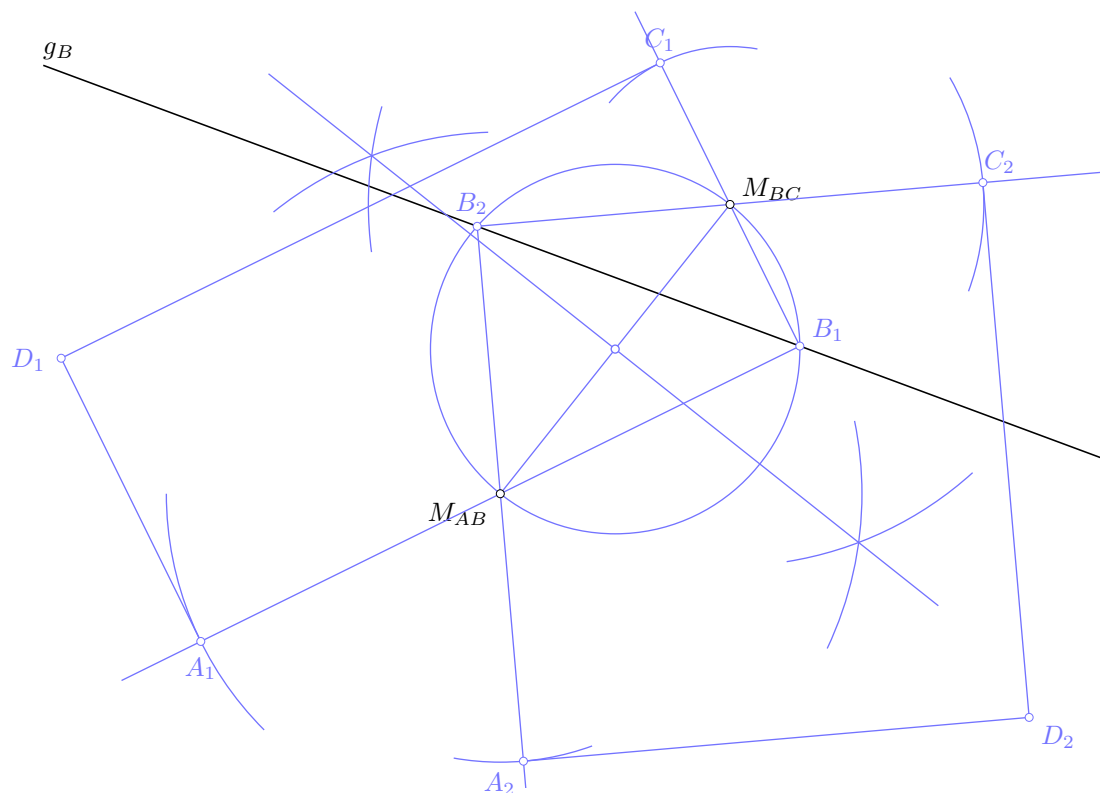


[4P]

Aufgabe 11 [4P]

Von einem Rechteck $ABCD$ kennt man die Seitenmitte M_{AB} der Seite AB und die Seitenmitte M_{BC} der Seite BC . Ausserdem weiss man, dass die Ecke B auf der Geraden g_B liegt.

Konstruiere die zwei möglichen Rechtecke $ABCD$. Beschrifte die Ecken korrekt.



Da der Winkel bei B , also $\sphericalangle M_{AB} B M_{BC}$, ein rechter Winkel ist, muss B auf dem Thaleskreis k über $M_{AB} M_{BC}$ liegen. [1 P]

Die Schnittpunkte von k und der Geraden g_B geben die **zwei** möglichen Positionen des Punktes B an. [1 P]

Die Punktspiegelung von B an M_{AB} liefert A und die Punktspiegelung von B an M_{BC} liefert C . [1 P]

Den Punkt D erhält man als Schnittpunkt der Parallelen durch C zu AB mit der Parallelen durch A zu BC . [1 P]

Aufgabe 12 [4P]

Lies den folgenden Artikel sorgfältig durch und beantworte danach die untenstehenden Fragen.

Das Binärsystem

Im täglichen Leben rechnen wir im sogenannten **Dezimalsystem**. Zum Beispiel hat die Zahl

$$2\,305$$

die vier Ziffern 2, 3, 0, 5. Man nennt sie die **Tausender-, Hunderter-, Zehner- und Einerziffer**. Die Namensgebung kommt daher, dass es sich bei 2305 um die Zahl

$$2\,305 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 5 \cdot 1$$

handelt. Die Ziffern geben das Vielfache der Zehner-Potenzen an. Die Zahl 10 heisst die **Basis** des Systems.

Ein anderes Zahlensystem ist das sog. **Binärsystem**. Bei diesem Zahlensystem ist die Zahl 2 die Basis, und alle Zahlen werden nur mit den Ziffern 0 und 1 dargestellt.

Zum Beispiel ist

$$1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1$$

eine Zahl im Binärsystem mit den Ziffern 1, 1, 0, 1. Man nennt sie die **Achter-, Vierer-, Zweier- und Einerziffer**. Wie beim Dezimalsystem lässt man die Potenzen weg und notiert nur die Ziffern, nämlich als

$$1101_2.$$

Mit der tiefgestellten 2 deutet man an, dass es sich bei der Ziffernfolge 1101 um eine Zahl im Binärsystem handelt. Damit kann man Verwechslungen vermeiden.

Nützlich ist eine Tabelle mit den Zweierpotenzen.

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2	1
128	64	32	16	8	4	2	1

Hier zwei weitere Beispiele:

$$\begin{aligned} 10110_2 &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ &= 16 + 4 + 2 = 22, \end{aligned}$$

$$101001_2 = 2^5 + 2^3 + 1 = 32 + 8 + 1 = 41.$$

Gegeben sei die Zahl 45 im Dezimalsystem. Sie soll ins Binärsystem umgerechnet werden. Dazu schaut man in der obigen Tabelle nach, welche grösste Zweierpotenz in 45 enthalten ist. Es ist dies die Zahl 32 und somit $45 = 32 + 13$. Nun sucht man die grösste Zweierpotenz die in 13 enthalten ist. Man findet via Tabelle die 8. Danach fährt man in derselben Weise fort und erhält

$$45 = 32 + 8 + 4 + 1 = 101101_2.$$

Das Binärsystem ist in unserer digitalen Welt von grosser Bedeutung. Computer rechnen im Binärsystem. Alle Daten werden zur Speicherung auf elektronischen Geräten ins Binärsystem umgewandelt und so abgespeichert.

- (a) Schreibe die Binärzahl 10011_2 im Dezimalsystem.
- (b) Schreibe die Zahl 53 im Binärsystem.
- (c) Gegeben seien die folgenden vier Zahlen a, b, c und d im Binärsystem.

$$a = 110010_2 \quad b = 111111_2 \quad c = 10111_2 \quad d = 100110_2$$

Ordne die Zahlen a, b, c, d nach ihrer Grösse. Setze dazu a, b, c, d in die Felder.

$$\boxed{c} < \boxed{d} < \boxed{a} < \boxed{b}$$

Hinweis. Eine Umrechnung ins Dezimalsystem ist nicht unbedingt erforderlich.

(a) $10011_2 = 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 16 + 2 + 1 = \underline{19}$

[1 P]

(b) Die grösste Zweierpotenz, die kleiner als 53 ist, lautet 32. Nun ist $53 = 32 + 21$. Die grösste Zweierpotenz, die kleiner als 21 ist, lautet 16 und es gilt $21 = 16 + 5$. Weiter gilt $5 = 4 + 1$. Somit haben wir

$$53 = 32 + 16 + 4 + 1 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1$$

[2 P]

Die Darstellung der Zahl 53 im Binärsystem lautet 110101₂.

(c) Die Zahl c hat nur 5 Stellen, die anderen hingegen 6 Stellen. Daher ist c die kleinste Zahl. Die Zahl b hat lauter Ziffern 1 und stellt damit die grösste Zahl dar, die mit 6 Stellen im Binärsystem darstellbar ist. Daher ist b die grösste der vier Zahlen. Schliesslich stimmen a und d in der linkensten Ziffer überein, aber nicht in der rechts daneben stehenden, der 16^{er}-Ziffer. Daher ist a grösser als d , weil die 16^{er}-Ziffer (das ist die 5^{te} Ziffer von rechts) bei d 0 und bei a 1 ist. Damit ist a die zweitgrösste und d die drittgrösste der vier Zahlen.

[1 P]

Aufnahmeprüfung Mathematik 2023

Notenskala: für 42 Punkte wurde die ungerundete Note 6 erteilt.