Mathematik
Aufnahmeprüfung 2018

KANTONSSCHULE
SCHAFFHAUSEN

Zeit: 2 Stunden

Rechner: TI30/TI34 oder vergleichbare.

Hinweis: Der Lösungsweg muss nachvollziehbar sein, ansonsten werden keine Teilpunkte vergeben.

Numerische Resultate sind - sofern nicht anders verlangt - auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Summe**
Punkte	4	4	3	3	4	3	4	4	4	2	4	4	43

Mathematik
Aufnahmeprüfung 2018

KANTONSSCHULE SCHAFFHAUSEN

Vorname: **Name:**

Aufgabe 1

Löse die Klammern auf und fasse so weit wie möglich zusammen:

(a) $(-2) \cdot (7x - 3) \;= ?$

(b) $(x^2 - 4x) - (x^3 - 2x + x^2) \;= ?$

Schreibe das Ergebnis vollständig gekürzt:

(c) $\dfrac{7a}{5} - \dfrac{a}{25} + \dfrac{3a}{10} \;= ?$

(d) $\dfrac{3a^2}{b} \cdot \dfrac{b^3}{a} \;= ?$

Aufgabe 2

(a) Löse die Gleichung nach dem Winkel β auf:

$$2\beta - \frac{2 \cdot (60^\circ - \beta) + 180^\circ - \beta}{3} \; = \; 83^\circ$$

(b) Löse die Gleichung nach der Unbekannten t auf:

$$1 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{4t}{3} \right) \; = \; \frac{3}{10} - \frac{2}{3} \cdot t$$

Aufgabe 3

Die Weltbevölkerung stieg im letzten Jahrzehnt (von 2007 bis 2017) um 12.7%. Im Jahr 2017 betrug sie 7576.9 Millionen Personen.

Für die folgenden Teilaufgaben wird angenommen, dass die Weltbevölkerung in jedem Jahrzehnt um 12.7% anwächst.

Gib bei allen Teilaufgaben das Resultat in Millionen auf eine Stelle nach dem Komma genau an.

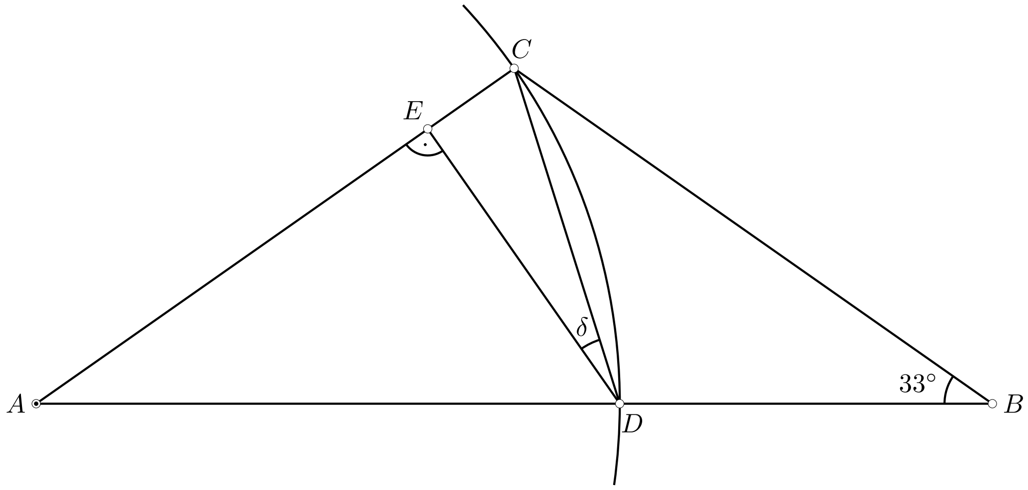
(a) Wie gross wird die Weltbevölkerung im Jahr 2027 (also nach einem Jahrzehnt) sein?

(b) Um wieviel Prozent wird die Weltbevölkerung von 2017 bis 2047 (also in drei Jahrzehnten) wachsen?

(c) Wie gross war die Weltbevölkerung im Jahr 2007 (also vor einem Jahrzehnt)?

Aufgabe 4

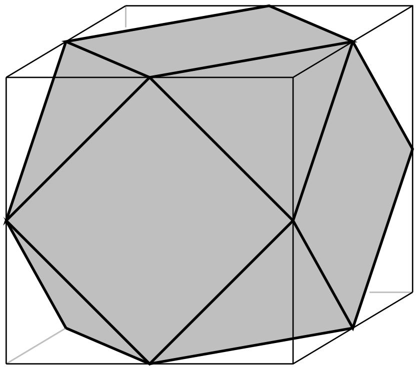
In der folgenden Figur ist das Dreieck ABC gleichschenklig mit $AC = BC$. Die Punkte C und D liegen auf einem Kreisbogen um A.



Berechne den Winkel δ.

Aufgabe 5

Einem Würfel werden die Ecken abgeschliffen. Es entsteht ein Restkörper mit lauter gleich langen Kanten. Dieser ist in der folgenden Figur grau gezeichnet.



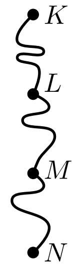
(a) Wie viele Ecken, Kanten und Flächen hat der Restkörper?

Anzahl Ecken = ________ Anzahl Kanten = ________ Anzahl Flächen = ________

(b) Vor dem Abschleifen hatte der Würfel die Kantenlänge 4 cm. Berechne das Volumen des Restkörpers.

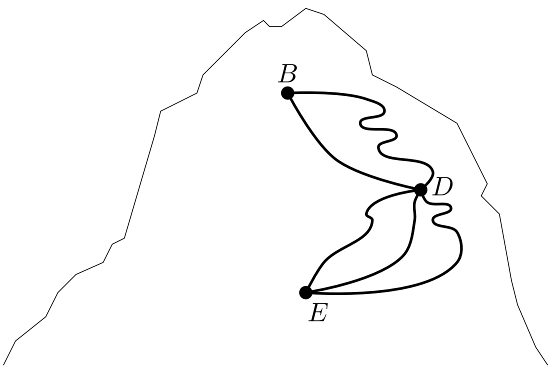
Aufgabe 6

Die nebenstehende Zeichnung zeigt eine Wanderroute von K nach N, die sich aus drei Wegstücken zusammensetzt.

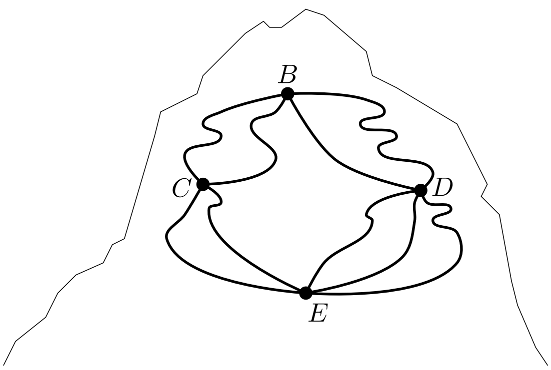


Die folgenden Zeichnungen zeigen verschiedene Wegstücke, die sich von oben nach unten zu Wanderrouten zusammensetzen lassen.

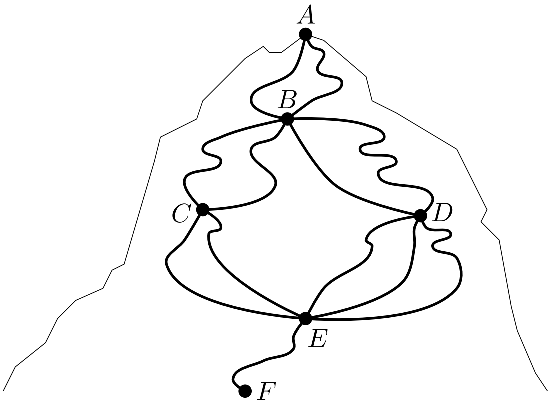
(a) Wie viele verschiedene Wanderrouten gibt es, welche von der Alp B zum Ort E im Tal hinunterführen?



(b) Wie viele verschiedene Wanderrouten gibt es, welche von der Alp B zum Ort E im Tal hinunterführen?

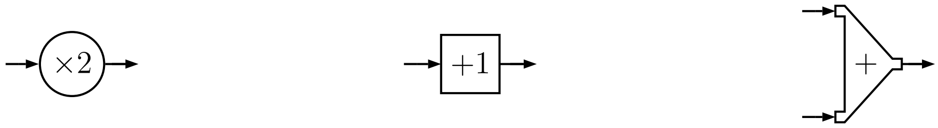


(c) Wie viele verschiedene Wanderrouten gibt es, welche vom Gipfel A zur Talsohle F hinunterführen?



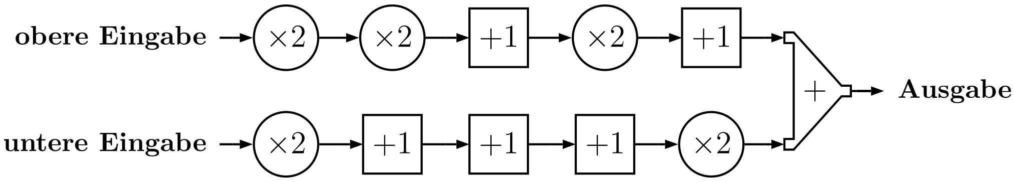
Aufgabe 7

Rechenmeister Riese besitzt drei Rechenelemente, welche die folgenden Berechnungen ermöglichen:



multipliziert mit 2   addiert 1 dazu   addiert zwei Zahlen

Er hat mit diesen Rechenelementen folgende Rechenmaschine gebaut:

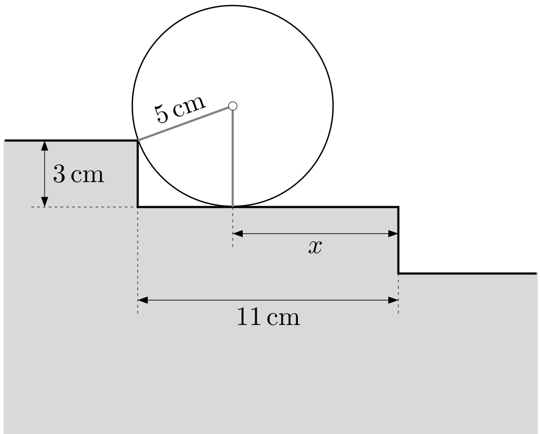


(a) Riese gibt in die obere Eingabe die Zahl $\frac{3}{4}$ ein. Bestimme die untere Eingabe so, dass die Ausgabe gleich 11 ist.

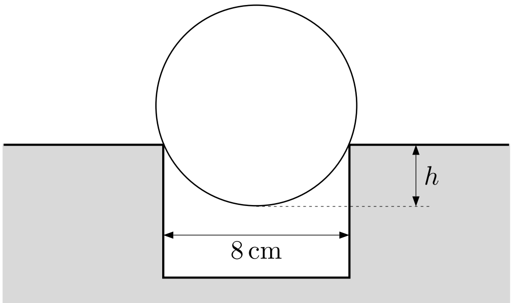
(b) Riese gibt in der oberen und unteren Eingabe je die gleiche Zahl x ein. Bei welcher Zahl x ist dann die Ausgabe gleich der Zahl 7? Stelle dazu eine Gleichung auf und löse diese.

Aufgabe 8

(a) Eine Kugel mit dem Radius 5 cm rollt eine treppenförmige Bahn hinunter. Die Figur zeigt die Situation. Wie weit rollt die Kugel, bis sie die nächste Stufe hinunterfällt? Berechne diese Länge x auf mm genau.

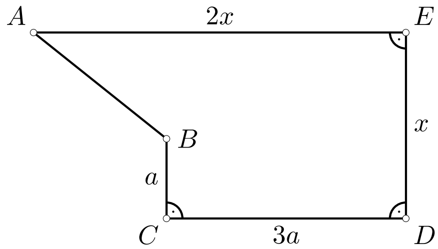


(b) Die Kugel mit Radius 5 cm rollt danach in einen Spalt der Breite 8 cm und bleibt dort liegen. Berechne die Einsinktiefe h.



Aufgabe 9

Betrachte das abgebildete Fünfeck $ABCDE$.



(a) Stelle eine Formel auf, mit der sich der Flächeninhalt des Fünfecks aus a und x berechnen lässt.

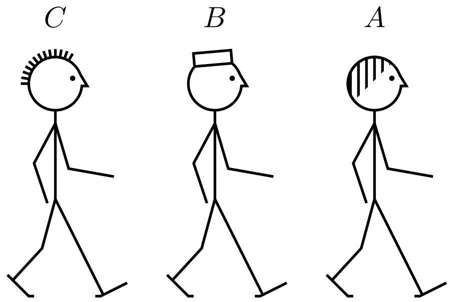
(b) Für $a = 4\,\text{cm}$ und x (in cm) hat das Fünfeck $ABCDE$ den Flächeninhalt (in cm^2)

$$F = x^2 + 2x + 24$$

Ermittle durch Probieren mit dem Taschenrechner die Länge x auf eine Stelle nach dem Komma genau, damit der Flächeninhalt möglichst nahe bei $96\,\text{cm}^2$ liegt.

Aufgabe 10

Sepp sagt immer die Wahrheit. Kurt sagt manchmal die Wahrheit. Paul sagt nie die Wahrheit. Die drei gehen in einer Reihe hintereinander. A geht zuvorderst, B in der Mitte, und C geht ganz hinten.

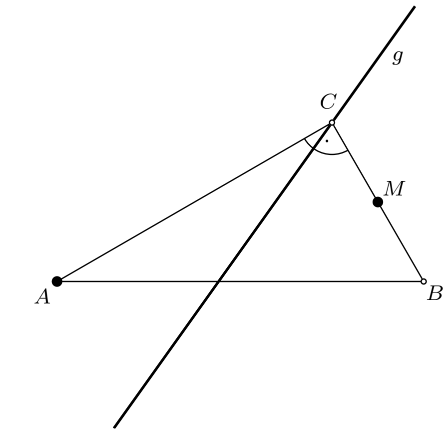


A sagt: “In der Mitte geht Sepp.”, B sagt: “Ich bin Kurt.”, C sagt: “In der Mitte geht Paul.”

Wie heissen A, B und C?

Aufgabe 11

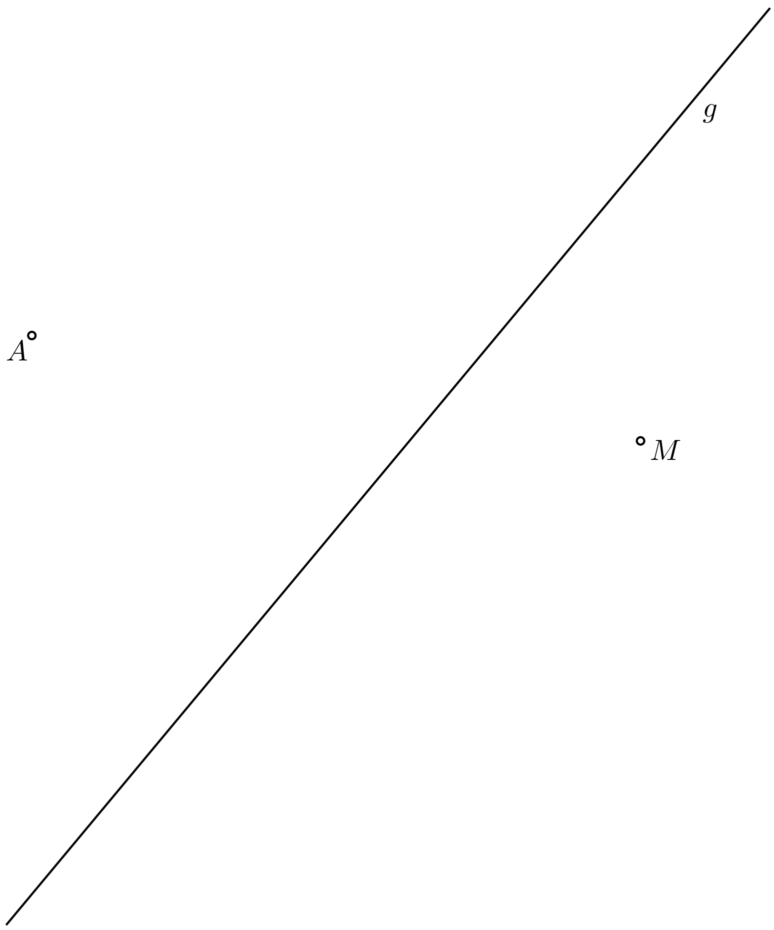
In der folgenden Skizze ist ABC ein rechtwinkliges Dreieck. Die Gerade g verläuft durch C. Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Kathete BC.



In der folgenden Situation sind die Ecke A, der Punkt M, sowie die Gerade g vorgegeben. Konstruiere alle Dreiecke ABC, welche die folgenden Bedingungen erfüllen: bei C haben sie einen rechten Winkel, die Ecke C liegt auf g, und M ist der Mittelpunkt der Kathete BC.

Die Korrektheit der Konstruktion muss zweifelsfrei erkennbar sein.

Studiere die obige Skizze. Sie kann hilfreich sein, die Konstruktion zu finden.



Aufgabe 12

Schreiner Schulz hat einen Holzwürfel mit der Kantenlänge 12 cm. Sowohl auf der oberen als auch bei der rechten Seitenfläche bringt er genau in der Mitte eine gerade Linie an (vgl. Bild 1).

Schulz fräst nun entlang der beiden Linien je einen Schlitz der Breite 2 cm und der Tiefe 6 cm in den Würfel. Zuerst fräst er entlang der rechten Linie (vgl. Bild 2), und danach entlang der oberen Linie. So entsteht der Restkörper wie er in Bild 3 gezeigt ist.

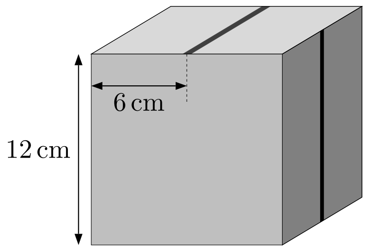


Bild 1

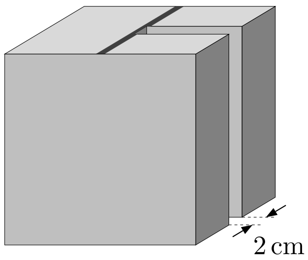


Bild 2

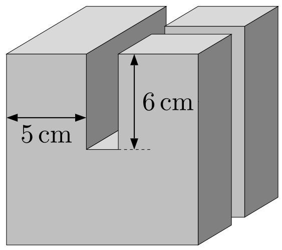


Bild 3

Berechne das Volumen des Restkörpers.

Mathematik
Aufnahmeprüfung 2018

Lösungen

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Summe**
Punkte	4	4	3	3	4	3	4	4	4	2	4	4	43

Aufgabe 1

Löse die Klammern auf und fasse so weit wie möglich zusammen:

(a) $(-2) \cdot (7x-3) \ = ?$

(b) $(x^2-4x)-(x^3-2x+x^2) \ = ?$

Schreibe das Ergebnis vollständig gekürzt:

(c) $\dfrac{7a}{5}-\dfrac{a}{25}+\dfrac{3a}{10} \ = ?$

(d) $\dfrac{3a^2}{b} \cdot \dfrac{b^3}{a} \ = ?$

(a)

$$(-2) \cdot (7x-3) = \underline{\underline{-14x+6}}$$

(b)

$$\begin{aligned}(x^2-4x)-(x^3-2x+x^2) &= x^2-4x-x^3+2x-x^2 \\ &= \underline{\underline{-x^3-2x}}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{7a}{5}-\frac{a}{25}+\frac{3a}{10} &= \frac{70a}{50}-\frac{2a}{50}+\frac{15a}{50} \\ &= \underline{\underline{\frac{83a}{50}}}\end{aligned}$$

(d)

$$\frac{3a^2}{b} \cdot \frac{b^3}{a} = \underline{\underline{3ab^2}}$$

Aufgabe 2

(a) Löse die Gleichung nach dem Winkel β auf:

$$2\beta - \frac{2 \cdot (60^\circ - \beta) + 180^\circ - \beta}{3} = 83^\circ$$

(b) Löse die Gleichung nach der Unbekannten t auf:

$$1 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{4t}{3}\right) = \frac{3}{10} - \frac{2}{3} \cdot t$$

(a)

$$\begin{aligned}
2\beta - \frac{2 \cdot (60^\circ - \beta) + 180^\circ - \beta}{3} &= 83^\circ \\
2\beta - \frac{120^\circ - 2\,\beta + 180^\circ - \beta}{3} &= 83^\circ \\
2\beta - \frac{300^\circ - 3\,\beta}{3} &= 83^\circ \\
2\beta - (100^\circ - \beta) &= 83^\circ \\
3\beta - 100^\circ &= 83^\circ \\
3\beta &= 183^\circ \implies \underline{\underline{\beta = 61^\circ}}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{4t}{3}\right) &= \frac{3}{10} - \frac{2}{3} \cdot t \\
1 - \frac{1}{10} + \frac{t}{3} &= \frac{3}{10} - \frac{2}{3} \cdot t \\
\frac{2}{3} \cdot t + \frac{t}{3} &= \frac{3}{10} + \frac{1}{10} - 1 \\
t &= -\frac{6}{10} \implies \underline{\underline{t = -\frac{3}{5}}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Die Weltbevölkerung stieg im letzten Jahrzehnt (von 2007 bis 2017) um 12.7%. Im Jahr 2017 betrug sie 7576.9 Millionen Personen.

Für die folgenden Teilaufgaben wird angenommen, dass die Weltbevölkerung in jedem Jahrzehnt um 12.7% anwächst.

Gib bei allen Teilaufgaben das Resultat in Millionen auf eine Stelle nach dem Komma genau an.

(a) Wie gross wird die Weltbevölkerung im Jahr 2027 (also nach einem Jahrzehnt) sein?

(b) Um wieviel Prozent wird die Weltbevölkerung von 2017 bis 2047 (also in drei Jahrzehnten) wachsen?

(c) Wie gross war die Weltbevölkerung im Jahr 2007 (also vor einem Jahrzehnt)?

(a)

$$7576.9\,\text{Mio} \cdot 1.127 = \underline{\underline{8539.2\,\text{Mio}}}$$

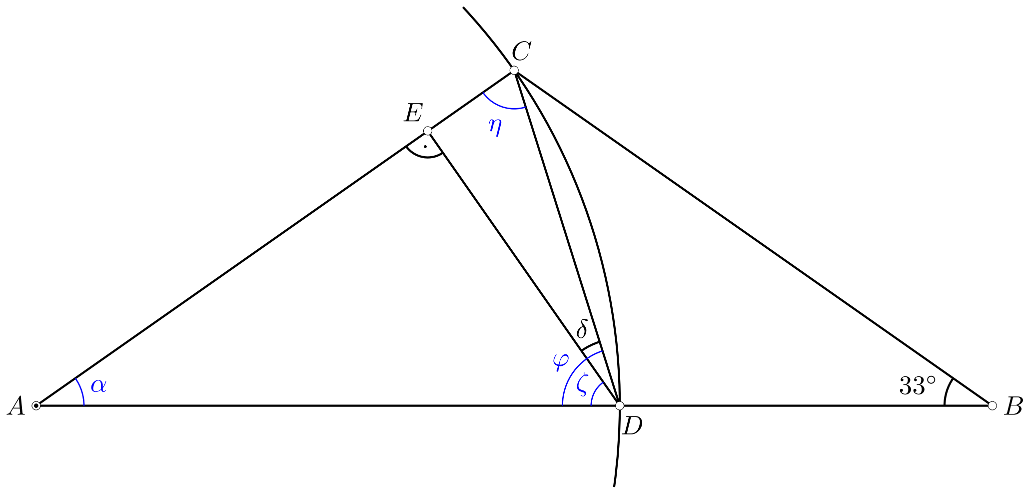
(b) Nach drei Jahrzehnten beträgt die Weltbevölkerung das $1.127^3 \approx 1.431$-fache. Als wächst sie um $\underline{\underline{43.1\%}}$.

(c)

$$7576.9\,\text{Mio} \div 1.127 = \underline{\underline{6723.1\,\text{Mio}}}$$

Aufgabe 4

In der folgenden Figur ist das Dreieck ABC gleichschenklig mit $AC = BC$. Die Punkte C und D liegen auf einem Kreisbogen um A.



Berechne den Winkel δ.

Weil ΔABC gleichschenklig ist mit $AC = BC$, gilt $\alpha = \sphericalangle CAB = 33°$

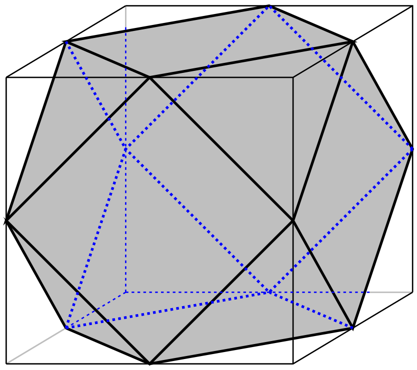
Aus der Winkelsumme in ΔADE folgt daher $\zeta = \sphericalangle ADE = 180° - 90° - 33° = 57°$.

Auch ΔADC ist gleichschenklig mit $AD = AC$. Somit folgt $\eta = \sphericalangle ACD = \sphericalangle ADC = \varphi$ und daher $\eta = \varphi = \frac{180° - 33°}{2} = 73.5°$.

Es folgt $\delta = \varphi - \zeta = 73.5° - 57° = \underline{\underline{16.5°}}$.

Aufgabe 5

Einem Würfel werden die Ecken abgeschliffen. Es entsteht ein Restkörper mit lauter gleich langen Kanten. Dieser ist in der folgenden Figur grau gezeichnet.



(a) Wie viele Ecken, Kanten und Flächen hat der Restkörper?

Anzahl Ecken = 12 Anzahl Kanten = 24 Anzahl Flächen = 14

Alle Ecken des Restkörpers liegen auf den Würfelkanten, und auf jeder Würfelkante liegt genau eine Ecke. Die Anzahl Ecken sind daher die Anzahl Kanten des Würfels, also $\underline{\underline{12}}$.

Die Anzahl Kanten des Restkörpers ist die Anzahl Kanten aller seiner quadratischen Seitenflächen. Weil auf jeder der 6 Seitenflächen des Würfels eine solche quadratische Seitenfläche liegt, hat der Körper $6 \cdot 4 = \underline{\underline{24}}$ Kanten.

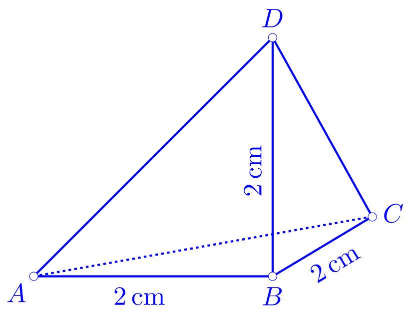
Der Restkörper hat 6 quadratische Seitenflächen. Beim Abschleifen entsteht bei jeder der 8 Würfelecken genau eine dreieckige Seitenfläche. Also hat der Restkörper $6 + 8 = \underline{\underline{14}}$ Flächen.

(b) Vor dem Abschleifen hatte der Würfel die Kantenlänge 4 cm. Berechne das Volumen des Restkörpers.

Beim Abschleifen des Würfels werden an jeder der 8 Ecken lauter gleiche Pyramiden entfernt. Ist V das Volumen einer solchen Pyrmaide, so hat der Restkörper das Volumen

$$V_R = 4^3\,\mathrm{cm}^3 - 8 \cdot V = 64\,\mathrm{cm}^3 - 8 \cdot V\,.$$

Die Abblidung zeigt die bei der rechten unteren Ecke des Würfels abgeschliffene Pyramide. Die Kanten AB, BC und BD stehen senkrecht zueinander, und haben je die Länge 2 cm.



Die Grundfläche G ist das halbe Quadrat ABC mit der Seitenlänge 2 cm. Sie hat daher den Flächeninhalt

$$G = \frac{1}{2} \cdot 2^2\,\mathrm{cm}^2 \;=\; 2\,\mathrm{cm}^2\,.$$

Die Höhe h ist die Kante BD der Länge $h = 2\,\mathrm{cm}$.

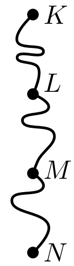
Das Volumen der Pyramide lautet also

$$V \;=\; \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \;=\; \frac{1}{3} \cdot 2\,\mathrm{cm}^2 \cdot 2\,\mathrm{cm} \;=\; \frac{4}{3}\,\mathrm{cm}^3$$

Folglich hat der Restkörper das Volumen $\underline{\underline{V_R}} \;=\; 64\,\mathrm{cm}^3 - 8 \cdot \frac{4}{3}\,\mathrm{cm}^3 \;=\; \underline{\underline{\tfrac{160}{3}\,\mathrm{cm}^3}}$ $(\approx 53.33\,\mathrm{cm}^3)$.

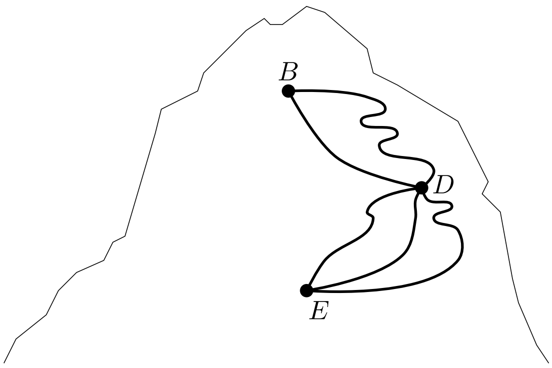
Aufgabe 6

Die nebenstehende Zeichnung zeigt eine Wanderroute von K nach N, die sich aus drei Wegstücken zusammensetzt.



Die folgenden Zeichnungen zeigen verschiedene Wegstücke, die sich von oben nach unten zu Wanderrouten zusammensetzen lassen.

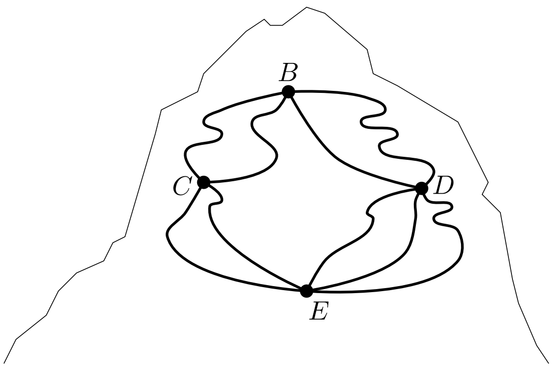
(a) Wie viele verschiedene Wanderrouten gibt es, welche von der Alp B zum Ort E im Tal hinunterführen?



Für jeden der beiden Wege von B nach D gibt es drei Wege von D nach E.

Also gibt es $2 \cdot 3 = \underline{\underline{6}}$ verschiedene Wanderrouten.

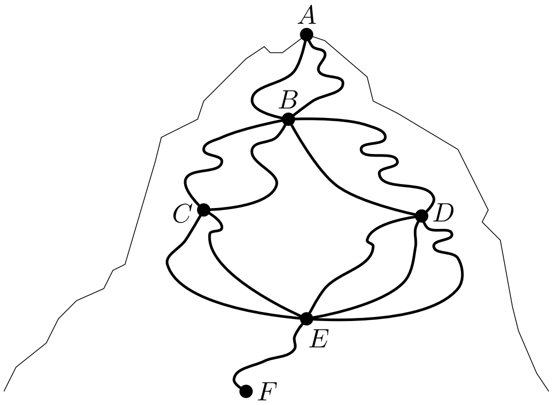
(b) Wie viele verschiedene Wanderrouten gibt es, welche von der Alp B zum Ort E im Tal hinunterführen?



Für jeden der beiden Wege von B nach C gibt es zwei Wege von C nach E.

Also gibt es $2 \cdot 2 = 4$ verschiedene Wanderrouten von B über C nach E. Zusammen mit den 6 Wanderrouten von B über D nach E sind es insgesamt $4 + 6 = \underline{\underline{10}}$ verschiedene Wanderrouten von B nach E.

(c) Wie viele verschiedene Wanderrouten gibt es, welche vom Gipfel A zur Talsohle F hinunterführen?

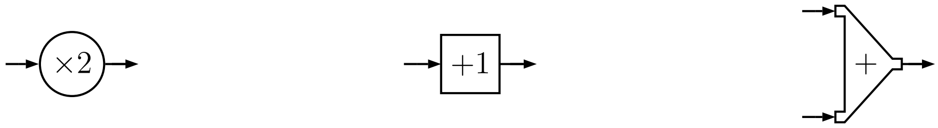


Für jeden der beiden Wege von A nach B gibt es gemäss (b) 10 verschiedene Wanderrouten von B nach E.

Also gibt es $2 \cdot 10 = 20$ verschiedene Wanderrouten von A nach E. Weil es nur ein Wegstück von E nach F gibt, sind es $\underline{\underline{20}}$ verschiedene Wanderrouten von A nach F.

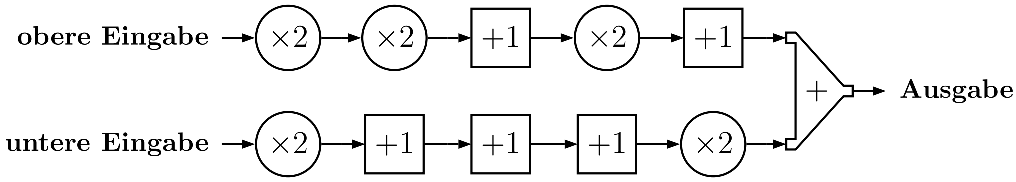
Aufgabe 7

Rechenmeister Riese besitzt drei Rechenelemente, welche die folgenden Berechnungen ermöglichen:



multipliziert mit 2   addiert 1 dazu   addiert zwei Zahlen

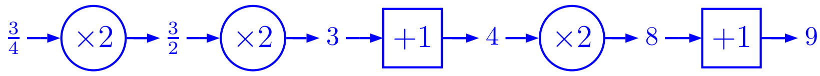
Er hat mit diesen Rechenelementen folgende Rechenmaschine gebaut:



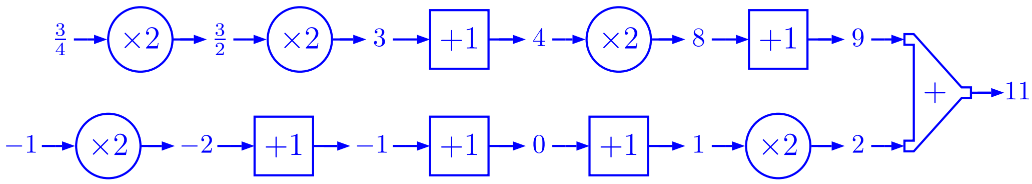
(a) Riese gibt in die obere Eingabe die Zahl $\frac{3}{4}$ ein. Bestimme die untere Eingabe so, dass die Ausgabe gleich 11 ist.

(b) Riese gibt in der oberen und unteren Eingabe je die gleiche Zahl x ein. Bei welcher Zahl x ist dann die Ausgabe gleich der Zahl 7? Stelle dazu eine Gleichung auf und löse diese.

(a) Die obere Eingabe liefert:

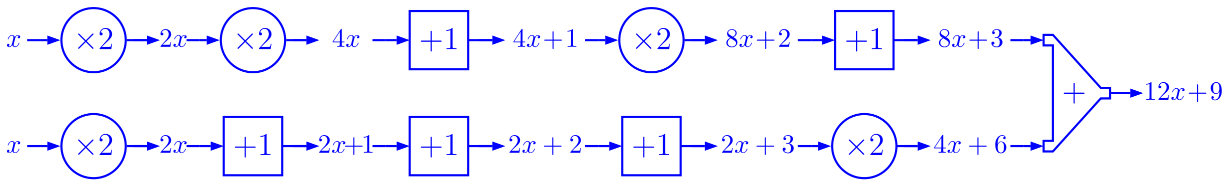


Da die Ausgabe 11 liefern soll können wir nun Schritt für Schritt zurückrechnen:



Die untere Eingabe muss $\underline{\underline{-1}}$ sein.

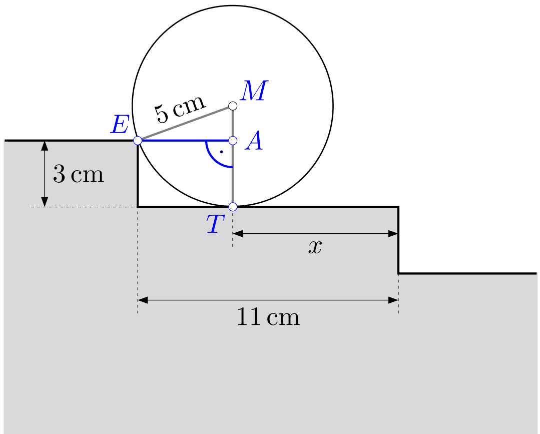
(b) Ist die obere und untere Eingabe gleich x, so gilt:



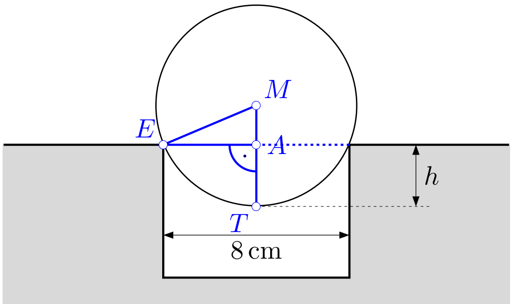
Es muss also die Gleichung $12x + 9 = 7$ gelöst werden: $12x = -2 \Rightarrow \underline{\underline{x = -\frac{1}{6}}}$

Aufgabe 8

(a) Eine Kugel mit dem Radius 5 cm rollt eine treppenförmige Bahn hinunter. Die Figur zeigt die Situation. Wie weit rollt die Kugel, bis sie die nächste Stufe hinunterfällt? Berechne diese Länge x auf mm genau.



(b) Die Kugel mit Radius 5 cm rollt danach in einen Spalt der Breite 8 cm und bleibt dort liegen. Berechne die Einsinktiefe h.



(a) Eingezeichnet sind die Radien $ME = MT = 5\,\text{cm}$, sowie die horizontale Strecke EA. Im rechtwinkligen Dreieck EAM misst die Hypotenuse $ME = 5\,\text{cm}$ und die Kathete

$$MA = MT - AT = 5\,\text{cm} - 3\,\text{cm} = 2\,\text{cm}$$

Mit dem Satz von Pythagoras hat demnach die Kathete EA die Länge

$$EA \;=\; \sqrt{5^2 - 2^2}\,\text{cm} \;=\; \sqrt{21}\,\text{cm}$$

Folglich hat x die Länge

$$\underline{\underline{x}} \;=\; (11 - \sqrt{21})\,\text{cm} \underline{\underline{\approx\; 6.4\,\text{cm}}}$$

(b) Eingezeichnet sind der Radius ME und der vertikale Radius MT. Die Strecke EA ist halb so lang wie der Spalt. Daher ist

$$EA = 4\,\text{cm}, \qquad ME = MT = 5\,\text{cm}$$

Mit dem Satz von Pythagoras hat die Kathete MA im rechtwinkligen Dreieck EAM die Länge

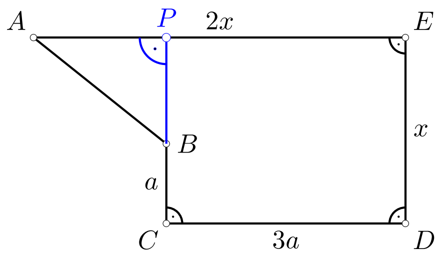
$$MA \;=\; \sqrt{5^2 - 4^2}\,\text{cm} \;=\; \sqrt{9}\,\text{cm} \;=\; 3\,\text{cm}$$

Folglich misst die Einsinktiefe

$$\underline{\underline{h \;=}}\, 5\,\text{cm} - 3\,\text{cm} \;=\; \underline{\underline{2\,\text{cm}}}$$

Aufgabe 9

Betrachte das abgebildete Fünfeck $ABCDE$.



(a) Stelle eine Formel auf, mit der sich der Flächeninhalt des Fünfecks aus a und x berechnen lässt.

Zerlege die Figur mit der Strecke BP in das Rechteck $CDEP$ und in das rechwinklige Dreieck BPA.

Das Rechteck hat den Flächeninhalt $3a \cdot x$.

Die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks BPA haben die Längen

$$AP = 2x - 3a, \qquad \text{und} \qquad BP = x - a$$

Also hat das Dreieck den Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot (2x - 3a) \cdot (x - a)$. Das Fünfeck hat somit den Flächeninhalt

$$\underline{\underline{F = 3a \cdot x + \frac{(2x-3a) \cdot (x-a)}{2}}}$$

(b) Für $a = 4\,\text{cm}$ und x (in cm) hat das Fünfeck $ABCDE$ den Flächeninhalt (in cm^2)

$$F = x^2 + 2x + 24$$

Ermittle durch Probieren mit dem Taschenrechner die Länge x auf eine Stelle nach dem Komma genau, damit der Flächeninhalt möglichst nahe bei $96\,\text{cm}^2$ liegt.

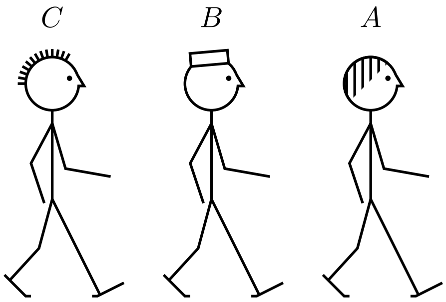
Eine Variante des Probierens zeigt die nebenstehende Tabelle.

Man findet so $\underline{\underline{x \approx 7.5}}$.

x	F		Bereich	Fehler
6	72	< 96		
8	104	> 96	$6 < x < 8$	
7	87	< 96	$7 < x < 8$	
7.5	95.25	< 96	$7.5 < x < 8$	-0.75
7.7	98.69	> 96	$7.5 < x < 7.7$	
7.6	96.96	> 96	$7.5 < x < 7.6$	$+0.96$

Aufgabe 10

Sepp sagt immer die Wahrheit. Kurt sagt manchmal die Wahrheit. Paul sagt nie die Wahrheit. Die drei gehen in einer Reihe hintereinander. A geht zuvorderst, B in der Mitte, und C geht ganz hinten.



A sagt: “In der Mitte geht Sepp.”, B sagt: “Ich bin Kurt.”, C sagt: “In der Mitte geht Paul.”

Wie heissen A, B und C?

A kann nicht Sepp sein, da er selbst sonst nicht die Wahrheit sagt.

B kann auch nicht Sepp sein, da er sonst nicht die Wahrheit sagt.

Also ist C Sepp.

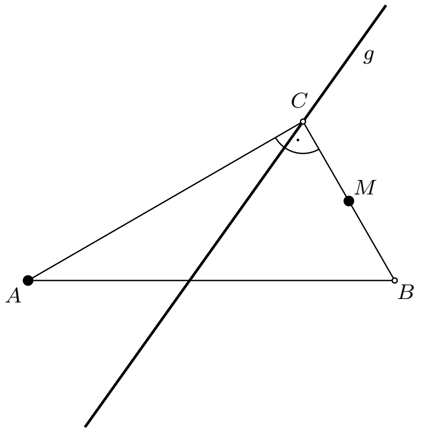
Sepp, der immer die Wahrheit sagt, gibt an, dass in der Mitte Paul läuft. Also ist B Paul.

Somit muss A Kurt sein.

A: Kurt, B: Paul, C: Sepp.

Aufgabe 11

In der folgenden Skizze ist ABC ein rechtwinkliges Dreieck. Die Gerade g verläuft durch C. Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Kathete BC.



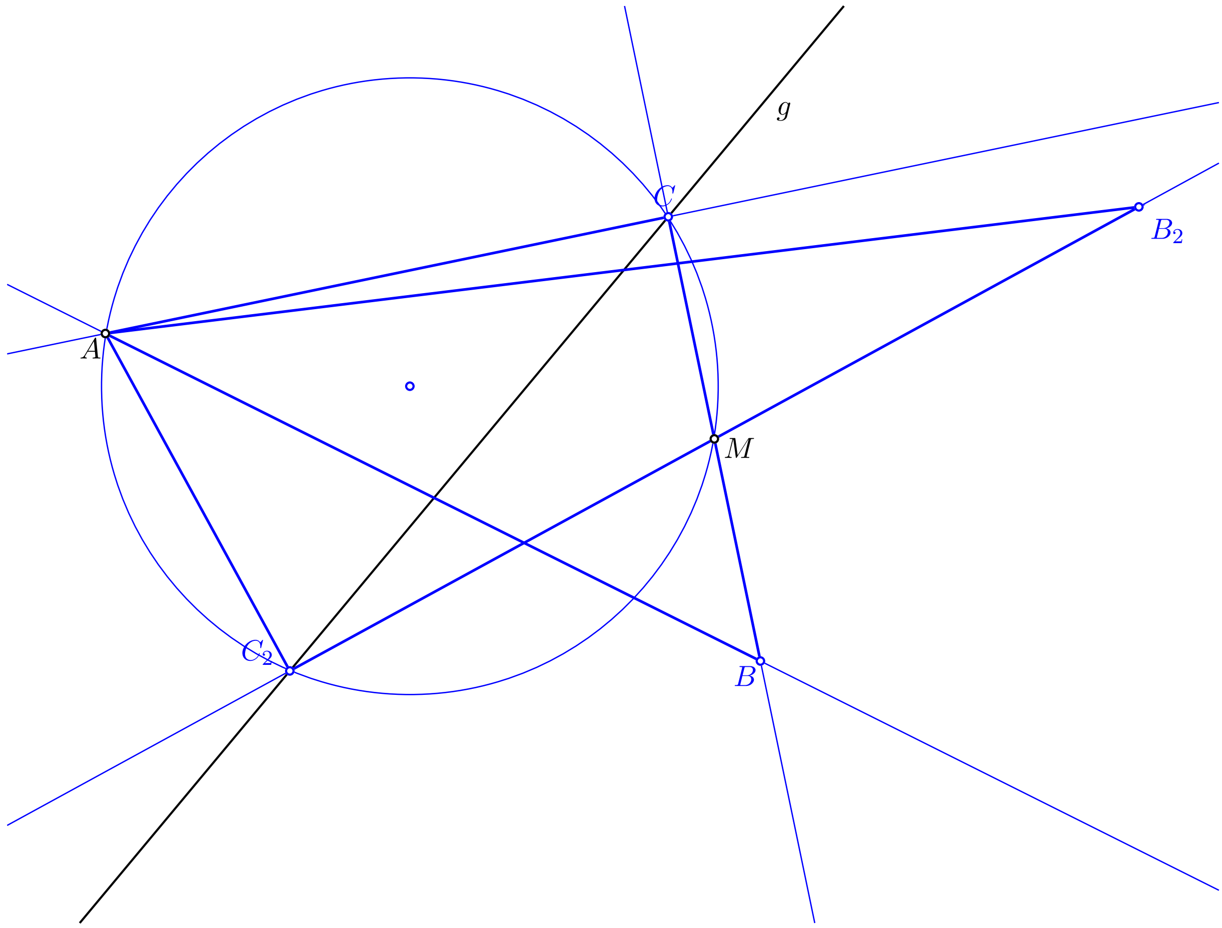
Konstruktion:

1. Thaleskreis k über AM (erster g.O. für C).
2. Die Schnittpunkte C, C_2 von g mit k.
3. C bzw. C_2 an M spiegeln: B bzw. B_2
4. Die Dreiecke ABC und AB_2C_2 erfüllen die Bedingungen.

In der folgenden Situation sind die Ecke A, der Punkt M, sowie die Gerade g vorgegeben. Konstruiere alle Dreiecke ABC, welche die folgenden Bedingungen erfüllen: bei C haben sie einen rechten Winkel, die Ecke C liegt auf g, und M ist der Mittelpunkt der Kathete BC.

Die Korrektheit der Konstruktion muss zweifelsfrei erkennbar sein.

Studiere die obige Skizze. Sie kann hilfreich sein, die Konstruktion zu finden.



Aufgabe 12

Schreiner Schulz hat einen Holzwürfel mit der Kantenlänge 12 cm. Sowohl auf der oberen als auch bei der rechten Seitenfläche bringt er genau in der Mitte eine gerade Linie an (vgl. Bild 1).

Schulz fräst nun entlang der beiden Linien je einen Schlitz der Breite 2 cm und der Tiefe 6 cm in den Würfel. Zuerst fräst er entlang der rechten Linie (vgl. Bild 2), und danach entlang der oberen Linie. So entsteht der Restkörper wie er in Bild 3 gezeigt ist.

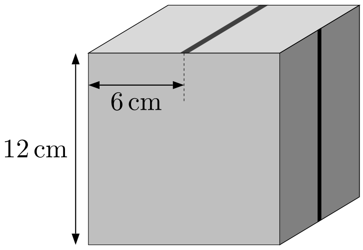


Bild 1

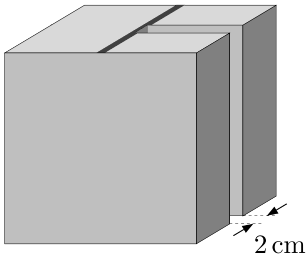


Bild 2

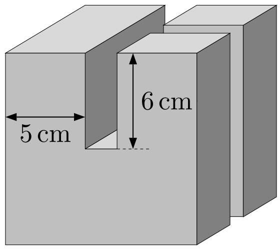


Bild 3

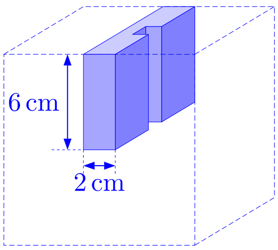
Berechne das Volumen des Restkörpers.

Variante 1

Der Würfel hat ein Volumen von $V_1 = (12\,\text{cm})^3 = 1728\,\text{cm}^3$.

Der Körper aus Bild 2 hat ein Volumen von $V_2 = V_1 - 2\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} = 1584\,\text{cm}^3$.

Der Körper aus Bild 3 hat ein Volumen von $V_3 = V_2 - V_{\text{Schlitz}}$, wobei V_{Schlitz} das Volumen dessen ist, was herausgeschnitten wurde:

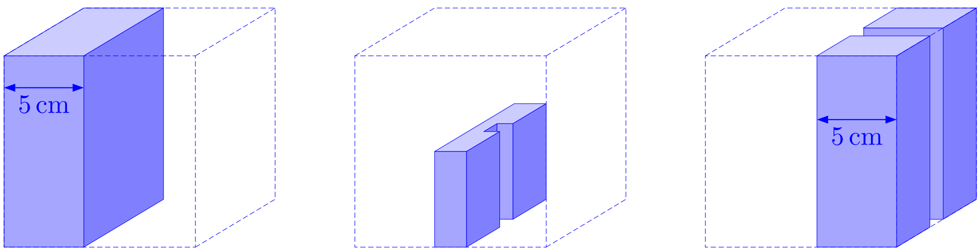


Das Volumen $V_{\text{Schlitz}} = (2\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm} - 1\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm}) \cdot 6\,\text{cm} = 22\,\text{cm}^2 \cdot 6\,\text{cm} = 132\,\text{cm}^3$.

Also gilt $V_3 = 1584\,\text{cm}^3 - 132\,\text{cm}^3 = \underline{\underline{1452\,\text{cm}^3}}$.

Variante 2

Der Körper aus Bild 3 wird aus Teilen aufgebaut:



Der linke Teilkörper hat das Volumen $V_L = 5\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm} = 720\,\text{cm}^3$.

Der mittlere Teilkörper hat das Volumen $V_M = (2\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm} - 1\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm}) \cdot 6\,\text{cm} = 22\,\text{cm}^2 \cdot 6\,\text{cm} = 132\,\text{cm}^3$.

Die rechten Teilkörper haben je das Volumen $V_R = 5\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm} = 300\,\text{cm}^3$.

Der Körper aus Bild 3 hat daher das Volumen

$$V_3 = V_L + V_M + 2V_R = 720\,\text{cm}^3 + 132\,\text{cm}^3 + 2 \cdot 300\,\text{cm}^3 = \underline{\underline{1452\,\text{cm}^3}}.$$